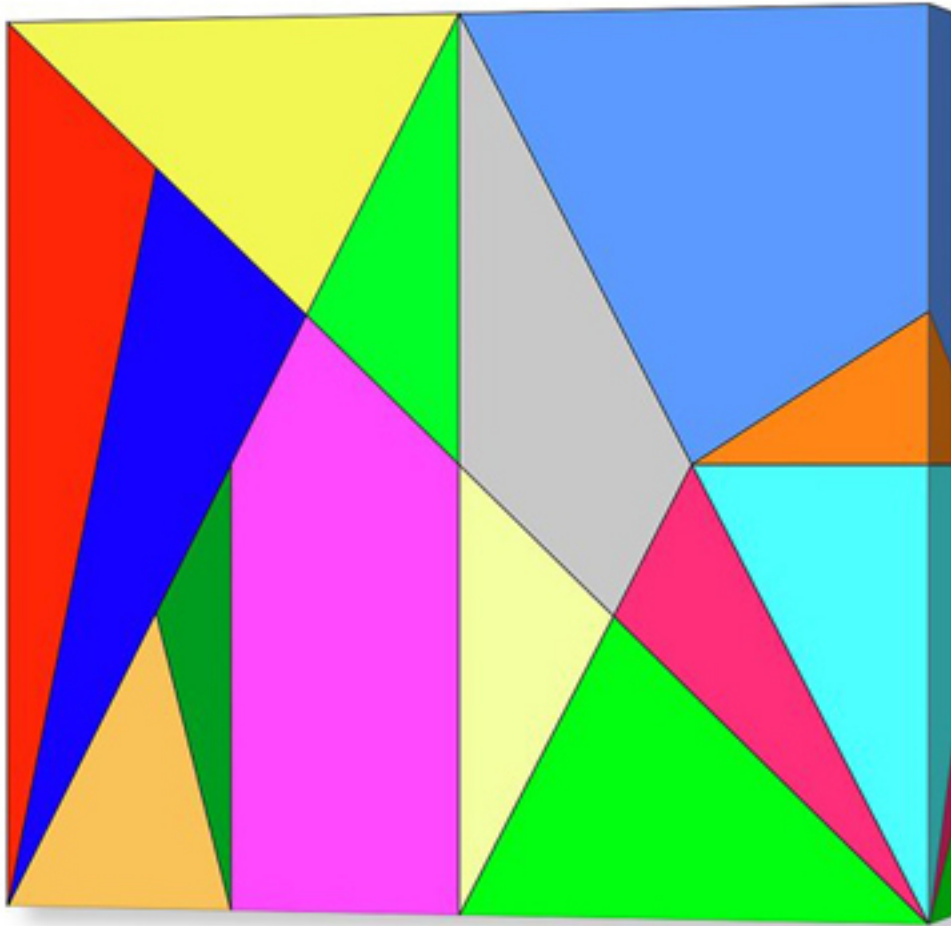
LEGGENDO ARCHIMEDE

Indagini su alcuni teoremi e congetture con l'aiuto del PC

Luciano Ancora

In copertina:

Lo S*tomachion*, in greco Στομάχιον, conosciuto anche come *loculus Archimedius,* è un gioco matematico studiato da Archimede e descritto nel suo libro "Codice C". Il puzzle è composto da 14 figure che possono formare un quadrato.

Una pagina web sullo Stomachion:
http://mvl-monteverdelegge.blogspot.it/2013/10/il-mal-di-stomaco-un-rompicapo-di.html

Sommario

Introduzione

Vi sarà capitato di trovare, nell'introduzione a qualche testo divulgativo di matematica, una raccomandazione dell'autore a leggere tenendo a portata di mano carta e matita, per poter rifare da soli calcoli, disegni, ragionamenti. Così facendo si raggiunge certamente, attraverso l'approfondimento, una più sicura conoscenza dei fatti della matematica.

Ma si può fare di più. Si può tenere acceso, mentre si legge, un personal computer, per poterne utilizzare, all'occorrenza, le straordinarie capacità di calcolo e grafiche. Si possono ottenere così risultati che vanno oltre la semplice acquisizione della conoscenza.

Un lettore che abbia sufficiente spirito di osservazione e capacità di analisi, pur senza possedere un elevato grado di preparazione, può addirittura fare delle piccole "scoperte". Si può infatti, usando un foglio elettronico, analizzare calcoli complessi seguendone lo svolgimento attraverso lo studio dei risultati parziali, che spesso presentano interessanti regolarità o simmetrie, indici talvolta della presenza di schemi *ricorrenti* o *induttivi* che possono condurre alla scoperta di soluzioni generali del problema in esame. Ed ancora, usando il CAD, è possibile sfruttare la grafica del computer per costruire modelli geometrici del problema, ed osservarli poi da angolazioni diverse, alla ricerca di un procedimento risolutivo, che spesso si presenta in modo sorprendente.

Archimede, nella lettera introduttiva al suo libro "Sulla sfera e il cilindro", riferendosi ai risultati delle sue ricerche su questi oggetti, scrive: "... *per queste proprietà appartenenti da sempre alla natura di queste figure accadde che dei molti degni geometri anteriori a Eudosso tutti le ignorarono e nessuno le comprese*". Le proprietà degli oggetti della matematica sono quindi "preesistenti" nella natura stessa degli oggetti, nascoste al nostro pensiero. Il computer, amplificando le nostre capacità di indagine, ci aiuta a riscoprirle, ed il loro ritrovamento è sempre fonte di sorpresa e meraviglia.

I tre articoli alle pag. 7, 18 e 24 formano insieme una *trilogia*, avendo in comune alcuni elementi della teoria dei numeri.

Nel primo di essi compare il *Numero Piramidale Quadrato*, con l'uso del quale si riesce a "quadrare" il segmento parabolico. La dimostrazione in esso contenuta ha valore *euristico*, non esistendo lavori precedenti che mettono in relazione la *Parabola* con il *Numero Piramidale Quadrato*. Lo si può vedere subito in Internet digitando insieme le *keywords* di questi due oggetti matematici.

Il secondo articolo ha avuto origine da una ricerca, ausiliaria alla precedente, per ottenere la nota formula che calcola la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali. All'epoca Internet muoveva ancora i primi passi e la necessità di conoscere tale formula, per sviluppare il primo lavoro, mi ha indotto a ricorrere al "fai da te". Mi sono poi accorto, molto tempo dopo, che il metodo impiegato in quegli appunti era nuovo.

Una terza novità la si trova nell'ultimo articolo della trilogia, nato quasi come un gioco sulla scia del secondo, dove si calcola quello che gli inglesi chiamano: the *squared triangular number*. Quest'ultimo lavoro è il mio preferito, per la sua originalità e immediatezza.

Un altro articolo "in odor di novità" è quello sulla somma delle somme, presentato a pag. 30.

La raccolta prosegue con altri articoli che non propongono alcuna novità, pur contenendo alcuni qualche spunto di un certo valore *didattico*.

Luciano Ancora

Le opere di Archimede

Da: Opere di Archimede, a cura di Attilio Frajese (Utet, 1974).

1 Sull'equilibrio dei piani
Opera divisa in due libri in cui si tratta di concetti e proposizioni che riguardano la meccanica: la statica in particolare. Nel primo libro viene trattato l'argomento dei centri di gravità del triangolo e del trapezio. Nel libro secondo si applicano risultati del primo per la determinazione del centro di gravità del segmento parabolico.

2 Quadratura della parabola
L'opera ha per argomento la quadratura del segmento parabolico, cioè la costruzione (con riga e compasso) di un poligono ad esso equivalente. Archimede risolve il problema servendosi prima di metodi "meccanici", ed infine lo dimostra geometricamente applicando il rigoroso "metodo di esaustione".

3 Sulla sfera e il cilindro
Opera in due libri che può essere considerata la diretta continuazione degli Elementi di Euclide. Il libro primo contiene risultati fondamentali riguardanti la superficie e il volume della sfera. Il libro secondo è composto da problemi relativi alla divisione della sfera (mediante piani) in segmenti soddisfacenti a determinate condizioni.

4 Metodo
Opera perduta attraverso i secoli e felicemente ritrovata nel 1906 dal filologo danese Heiberg. In essa si espone quel metodo "meccanico" che Archimede adoperava per trovare i suoi risultati, che solo in un secondo momento avrebbe dimostrato geometricamente in maniera rigorosa.

5 Spirali
In quest'opera Archimede introduce e studia quella curva che è stata in seguito chiamata spirale di Archimede. La trattazione procede su due argomenti, consistenti nell'uso della spirale per la rettificazione della circonferenza e nella quadratura di aree comprese fra la spirale e determinate rette.

6 Conoidi e sferoidi
Archimede, in quest’opera originale, studia alcuni solidi limitati da superfici dette oggi del secondo ordine, o “quadriche”. Si tratta di solidi ottenuti mediante una rotazione completa di una curva piana intorno ad un asse fisso. L’opera contiene risultati fondamentali riguardanti la determinazione dei volumi di segmenti dei conoidi e dello sferoide e sue parti.

7 Galleggianti
Quest'opera si divide in due libri, il cui argomento comune è quello della immersione, totale o parziale, di un corpo solido entro un liquido. Nel libro primo viene stabilito e trattato il famoso principio di idrostatica che i posteri hanno giustamente chiamato "principio di Archimede".

8 Misura del cerchio

Questa breve opera è probabilmente un estratto da altra opera più completa andata perduta. In essa sono contenute solo tre proposizioni, che trattano i problemi della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio. La proposizione terza, con la sua determinazione approssimata di π , costituisce uno dei più noti titoli di merito di Archimede.

9 Arenario

In quest'opera Archimede si pone il problema di contare il numero dei grani di sabbia contenuti nella sfera delle stelle fisse, racchiudente l'universo. Ciò facendo, escogita un ingegnoso sistema per esprimere numeri molto grandi (cosa ardua per i greci, che non possedevano un efficace sistema di numerazione). L'opera contiene inoltre la più antica testimonianza sul sistema eliocentrico di Aristarco di Samo ed un interessante passo in cui Archimede, con semplici mezzi, misura l'angolo secondo il quale è visibile il disco solare.

Quadratura della parabola con il "numero piramidale quadrato"

Dimostreremo in questo articolo il teorema di Archimede sulla quadratura del segmento parabolico, senza fare ricorso agli strumenti del calcolo integrale, ma utilizzando semplicemente il *numero piramidale quadrato* ed i criteri di convergenza delle successioni numeriche.
La traduzione dall'ambito geometrico a quello numerico avverrà usando, come unità di misura delle aree coinvolte nella dimostrazione, triangoli equivalenti, opportunamente individuati nel reticolo di costruzione del segmento parabolico.

Introduzione

La *Quadratura della parabola* è una delle prime opere composte da Archimede. Essa ha per argomento la quadratura del segmento parabolico, cioè la costruzione (con riga e compasso) di un poligono ad esso equivalente. Per *segmento parabolico* Archimede intende la regione compresa fra una retta e una parabola, pensata come sezione di un cono retto. L'opera si apre con un'introduzione che tratta delle proprietà elementari della parabola; si passa poi ad eseguire la quadratura della parabola *per via meccanica*, con considerazioni che fanno riferimento all'equilibrio di una leva; finalmente si giunge alla dimostrazione *geometrica* della quadratura con il *metodo di esaustione*.
La nostra dimostrazione rivisita in chiave moderna l'opera di Archimede, utilizzando la stessa figura da lui usata nella proposizione 16, in cui si dimostra il risultato fondamentale che il triangolo *ABC* è triplo del segmento parabolico. Archimede usa un triangolo *ABC* rettangolo in *B*, avendo mostrato, nella precedente proposizione 15, che il risultato relativo ad una tale situazione si generalizza ad un segmento parabolico con base non perpendicolare all'asse (nota 1). Nella successiva proposizione 17 Archimede deduce il risultato più noto che il segmento parabolico è i 4/3 del triangolo inscritto.

Proposizione 16

Sia AB la base di un segmento parabolico; si conduca da B la retta BC parallela all'asse della parabola e da A la retta AC tangente alla parabola in A. Dico che l'area del segmento parabolico è un terzo dell'area del triangolo ABC.

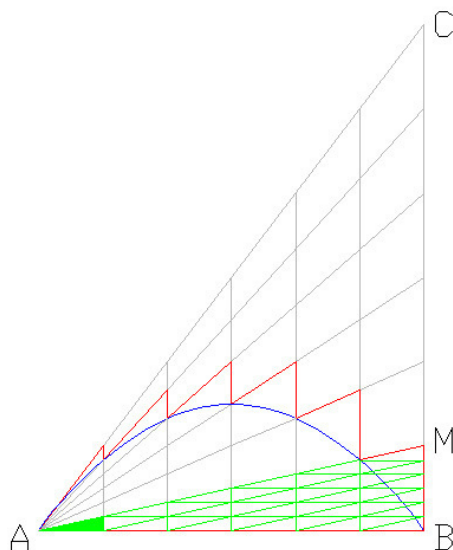



Fig. 1

Dimostrazione

Si dividano i segmenti *AB* e *BC* in 6 parti uguali e si conducano per i punti di divisione su *AB* le parallele alla retta *BC*, e per i punti su *BC* le congiungenti con *A*. La parabola passa per i punti di intersezione del reticolo così tracciato, poiché, per una sua proprietà, essa taglia le linee verticali del reticolo nello stesso rapporto nel quale le linee verticali stesse tagliano il segmento *AB* (non riportiamo la dimostrazione di questo fatto; comunque, una verifica per via analitica non presenta difficoltà).
Consideriamo la *figura a denti di sega* che circoscrive il segmento parabolico. L'area di questa figura eccede l'area del segmento stesso di una quantità che è pari all'area complessiva dei denti. Aumentando indefinitamente il numero delle divisioni, che indichiamo con *n*, sui segmenti *AB* e *BC*, l'area in eccesso tende a zero per *n* tendente ad infinito. In altre parole: l'area della figura a denti di sega *converge* all'area del segmento parabolico, per *n* tendente ad infinito.
La figura a denti risulta divisa in 6 strisce verticali composte: la prima da 6 triangoli *equivalenti*, e le altre strisce, rispettivamente, da 5, 4, 3, 2, 1 trapezi, *equivalenti* fra loro in ciascuna striscia. Consideriamo ora il triangolino, evidenziato in verde, con un vertice nel punto *A*. Useremo questo triangolo come *unità di misura* delle aree nei conteggi che seguono.

Il triangolo *ABM* contiene: 1+3+5+7+9+11 (somma dei primi 6 numeri dispari) =
= 6^2 triangoli verdi (la somma dei primi *n* numeri dispari è n^2).

L'area del triangolo *ABC* è uguale all'area di: $6 \cdot 6^2 = 6^3$ triangoli verdi.
In generale, per un qualsiasi numero *n* di divisioni di *AB* e *BC*, *l'area del triangolo ABC è uguale all'area di* n^3 *triangoli verdi.*

Indichiamo con *A(cir.)* la figura a denti di sega circoscritta al segmento parabolico. Essa contiene (per l'equivalenza dei trapezi di cui sopra):

$$A_{(cir.)} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 91 \quad \text{triangoli verdi.} \qquad (1)$$

Nella (1) ciascun addendo è un prodotto: i primi fattori sono, nell'ordine, i primi 6 numeri dispari, mentre i secondi sono, a ritroso, i primi 6 numeri naturali.
Rappresentiamo ora la (1) con lo schema seguente (che riproduce anche la dislocazione nella figura 1 dei trapezi e del loro contenuto in triangoli, rendendo più intelligibile il conteggio).

1	→					= 1	$= 1^2$
1	3	→				= 4	$= 2^2$
1	3	5	→			= 9	$= 3^2$
1	3	5	7	→		= 16	$= 4^2$
1	3	5	7	9	→	= 25	$= 5^2$
1	3	5	7	9	11	= 36	$= 6^2$
							91

Fig. 2

Dallo schema segue che il totale dei triangoli verdi, contenuti nella figura $A_{(cir.)}$, è uguale alla somma dei quadrati dei primi 6 numeri naturali (esiste anche un percorso diagonale nello schema che porta alla stessa conclusione (nota 5)).
Risulta quindi che l'area della figura a denti di sega, espressa in triangoli verdi, è data dal *numero piramidale quadrato* P_6:

$$A_{(cir.)} = P_6 = \sum_{k=1}^{6} k^2$$

La generalizzazione, relativa alla divisione in un numero qualsiasi n di parti, segue dalla possibilità di estendere lo schema della figura 2 al numero n, aggiungendo righe contenenti sequenze successive di numeri dispari, fino all'n-sima. Si ottiene così, in generale, che:

$$A_n(cir.) = 1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + ... + (2n-1) \cdot 1$$

e che l'area dell'n-sima figura a denti di sega, che circoscrive il segmento parabolico, è espressa dal *numero piramidale quadrato* P_n:

$$A_{n\,(cir.)} = P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Questa circostanza, insieme al risultato ottenuto per l'area del triangolo *ABC* (che è uguale a n^3), ci permette di ridurre la dimostrazione alla semplice verifica della seguente relazione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

dove la somma al numeratore del primo membro è l'n-simo numero piramidale quadrato P_n.

E' ben noto che tale somma vale: $$P_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

A questo punto il limite (2) segue da fatto che il rapporto tra due polinomi dello stesso grado in n tende, per n tendente a infinito, al rapporto tra i rispettivi coefficienti direttivi (coefficienti dei termini di grado massimo).

Ora, la (2) afferma che: l'area (misurata in triangoli verdi) della figura circoscritta al segmento parabolico vale, per n tendente a infinito, un terzo dell'area del triangolo *ABC*. Segue quanto affermato nella proposizione 16.

La dimostrazione "dal basso"

Affinché la nostra dimostrazione possa dirsi completa sono necessarie due stime, una dall'*alto* e una dal *basso*, cioè con una figura *fuori* ed una *dentro* al segmento parabolico.

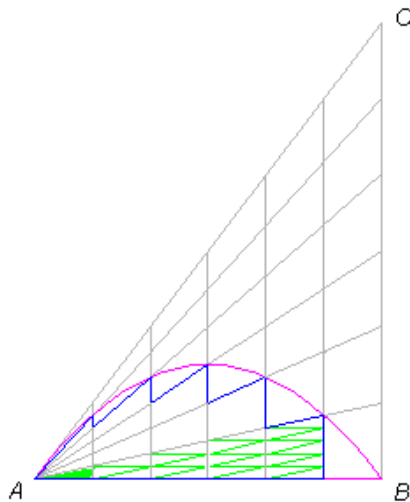



Fig. 3

Inscrivendo nel segmento parabolico una figura a denti di sega, che indichiamo con *A(ins.)*, è facile convincersi che questa contiene:

$$A_{(ins.)} = 1\cdot 5 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3 + 7\cdot 2 + 9\cdot 1 = 55 \quad \text{triangoli verdi.}$$

Ma il numero 55 è il 5° numero piramidale quadrato; pertanto, seguendo un ragionamento analogo al precedente, possiamo scrivere:

$$A_{n\,(ins.)} = 1\cdot(n-1) + 3\cdot(n-2) + ... + (2n-3)\cdot 1$$

Per l'area (in triangoli verdi) dell'*n*-sima figura inscritta abbiamo così:

$$A_{n\,(ins.)} = P_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Quindi, la dimostrazione "dal basso" segue dall'uguaglianza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k^2}{n^3} = \frac{1}{3} \qquad (3)$$

che risulta corretta, in quanto la somma al numeratore della (3) è:

$$P_{n-1} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2$$

che è ancora un polinomio di terzo grado in *n* con coefficiente direttivo uguale a 1/3.

Proposizione 17

Conseguenza immediata della proposizione 16 è la proposizione 17 con cui Archimede dimostra il teorema fondamentale sull'area del segmento parabolico (ma avendo impiegato un metodo meccanico):

L' area del segmento parabolico è 4/3 del triangolo avente stessa base ed uguale altezza.

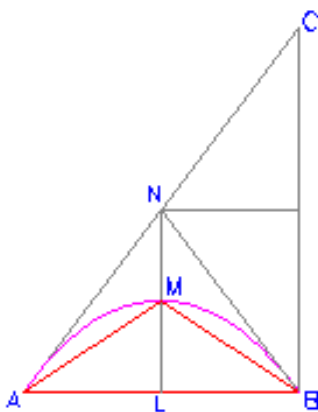



Fig. 4

Essendo infatti, per una proprietà della parabola:
$LM = MN$, risulta:

$A_{SP} = ABC/3 = 4/3\ ABM$

Poiché la proposizione 17 è un corollario della 16, avendo qui dimostrato la 16 per via geometrica, risulterebbe dimostrato per via geometrica anche il teorema fondamentale.

Note

1 - Il modello scelto per la nostra dimostrazione offre l'opportunità di mostrare in maniera diversa quanto affermato da Archimede nella proposizione 15, in cui generalizza la sua dimostrazione ad un segmento parabolico con la base non perpendicolare all'asse. La nostra dimostrazione può fare riferimento (senza cambiare una virgola nel testo) ad una figura più generale ottenuta traslando arbitrariamente il segmento *BC* sulla sua retta di appartenenza, nel modo seguente:

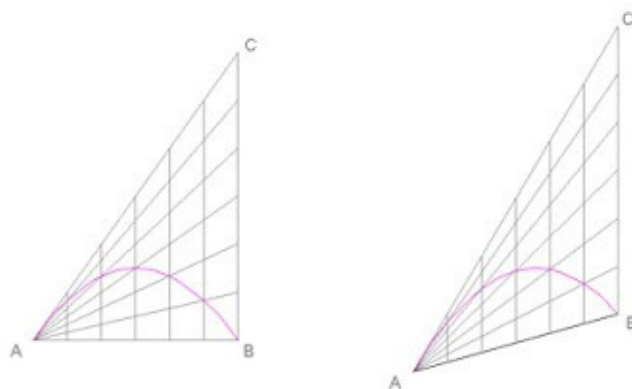



Fig. 5

Infatti la trasformazione lascia invariate tutte le relazioni di equivalenza fra trapezi e fra triangoli utilizzate nella dimostrazione, che sono l'essenza della dimostrazione stessa.

2 - La (2) può anche essere verificata in maniera *visiva*, nel modo seguente: si costruisca una piramide retta a base quadrata ponendo n^2 cubi unitari alla base e salendo concentricamente con $(n-1)^2$, $(n-2)^2$, ... , *9, 4, 1* cubo in sommità.

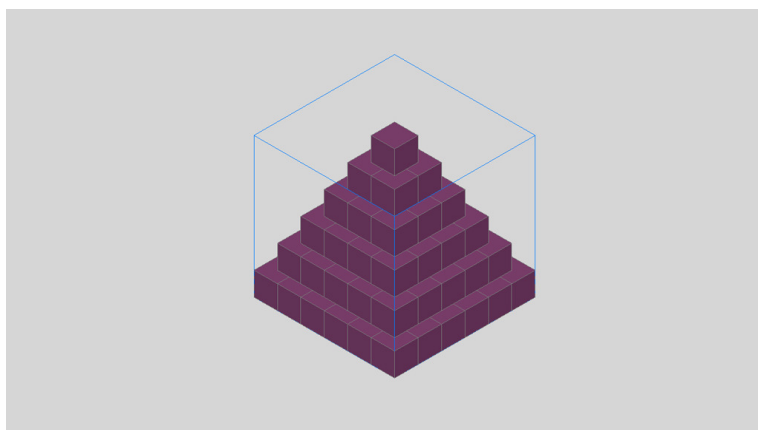



Fig. 6

Questa (per *n=6*) è una rappresentazione geometrica del *numero piramidale quadrato* P_n, il cui volume (numero dei cubi unitari) sarà dato dal numeratore nella (2). Al denominatore della (2) c'è il volume del cubo che la racchiude.

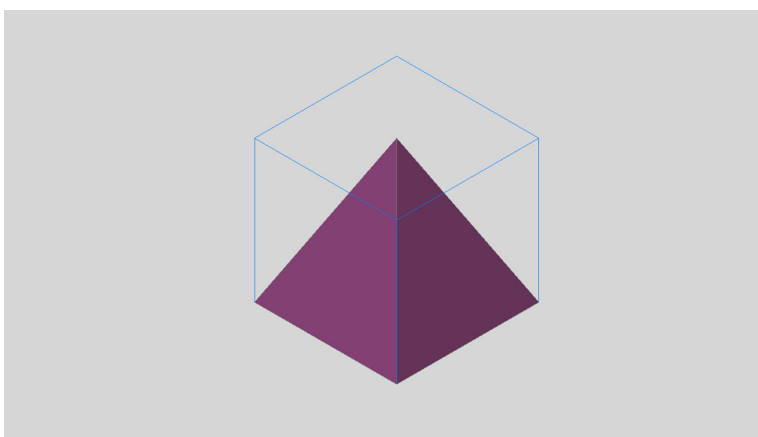



Fig. 7

Al limite di *n = infinito* la piramide diventa "ideale" ed è noto che il suo volume sarà pari ad un terzo del volume del cubo che la racchiude.

Esistono quindi due modelli diversi rappresentabili con la stessa relazione (2). Ciò induce a pensare che possano essercene degli altri. Si può ad esempio indagare su altre due figure, il cono ed il cilindro circoscritto, i cui volumi stanno nel rapporto di 1 a 3.

Si costruisca quindi un nuovo modello solido ponendo in sommità un cilindro unitario, avente diametro di base ed altezza uguali, e si scenda concentricamente con cilindri di pari altezza, aventi diametri 2, 3, 4, ... *n* volte il diametro del cilindro di sommità. Si vede subito che i volumi di questi strati cilindrici crescono come i quadrati dei numeri naturali.

Proseguendo allo stesso modo, con altre figure piane invece del quadrato e del cerchio, si trova infine che esistono infiniti modelli che descrivono la (2). Qui le figure piane da impiegare sono i *poligoni regolari*, tutti inscrivibili in una circonferenza. Risulterà sempre che le aree di queste figure, e quindi i volumi degli strati, variano come i quadrati di *n*.

Si noti infine che la concentricità delle costruzioni non è una condizione essenziale, cioè la stessa cosa vale anche per un qualsiasi modello obliquo (o costruito su un qualsiasi asse curvilineo).

3 - Quanto detto nel riquadro fra i tratteggi in verde a pag. 9, può essere “visto” , con riferimento ai modelli geometrici rappresentati nelle figure 1 e 6-7, nel modo seguente:

> A - Il termine di terzo grado del polinomio al numeratore della (2) corrisponde: al segmento parabolico della fig. 1, ed alla piramide regolare (inscritta) della fig. 7.
>
> B – I termini di grado inferiore dello stesso polinomio, sono: i denti di sega della fig. 1, ed i “gradini” della piramide in fig. 6 (vedi anche figure a pag. 19).

Nel processo di limite espresso con la (2), le quantità A non variano, mentre le quantità B diventano sempre più evanescenti, fino a scomparire del tutto all’infinito.

4 - Una ulteriore indagine sulla (2), conduce alla seguente generalizzazione:

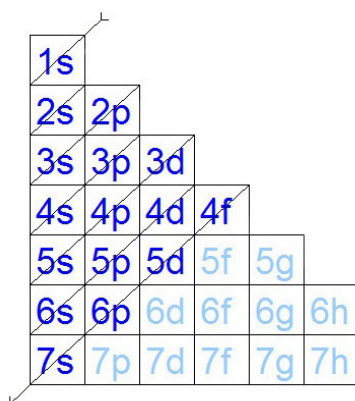
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} k^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \tag{4}$$

nella quale, al variare di *m*, le quantità al numeratore sono, ordinatamente: il *numero triangolare* T_n, il *numero piramidale quadrato* P_n, il *numero triangolare “squared”* T^2_n ed altre somme che si calcolano con la *formula di Faulhaber*.

Il limite (4) segue dal fatto che un polinomio di *Faulhaber* di grado $m+1$ ha coefficiente direttore pari a $1/m+1$. La (4) genera, al variare di m, la successione convergente degli inversi dei numeri naturali: $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/m+1, \ldots$

Si potrebbe a questo punto riscrivere tutto il discorso della nota 3 in termini di polinomi di *Faulhaber* di grado $m+1$ e relativi modelli ($m+1$)dimensionali, distinguendo in essi, nel processo di limite (4), i componenti invarianti dalle "asperità" (corrispondenti ai denti ed ai gradini visti in nota 2) che invece tendono ad annullarsi all'infinito.

5 - Un altro esempio di come sia possibile ordinare dei dati percorrendo le griglie, l'ho trovato anni fa studiando "Struttura della materia". In figura è mostrato un percorso diagonale che riproduce l'ordine di riempimento, per energie crescenti, degli stati quantici di un atomo:

1s					
2s	2p				
3s	3p	3d			
4s	4p	4d	4f		
5s	5p	5d	5f	5g	
6s	6p	6d	6f	6g	6h
7s	7p	7d	7f	7g	7h

cioè la famosa sequenza: 1s 2s 2p 3s 3p 4s 3d 4p 5s 4d 5p 6s 4f 5d 6p 7s ….

Progetti di ricerca

1 - Ricercare altre proposizioni su rapporti fra figure piane, del tipo qui considerato, che possano essere dimostrate in una maniera simile a quella qui usata.

2 - La quadratura della parabola con P_n, insieme alla verifica visiva fatta prima (nota 2) sono due esempi di come si possa impiegare, per scopi "pratici", una entità puramente "teorica" come P_n. Vedere se esistono (sempre con P_n) altri casi del genere.

Links

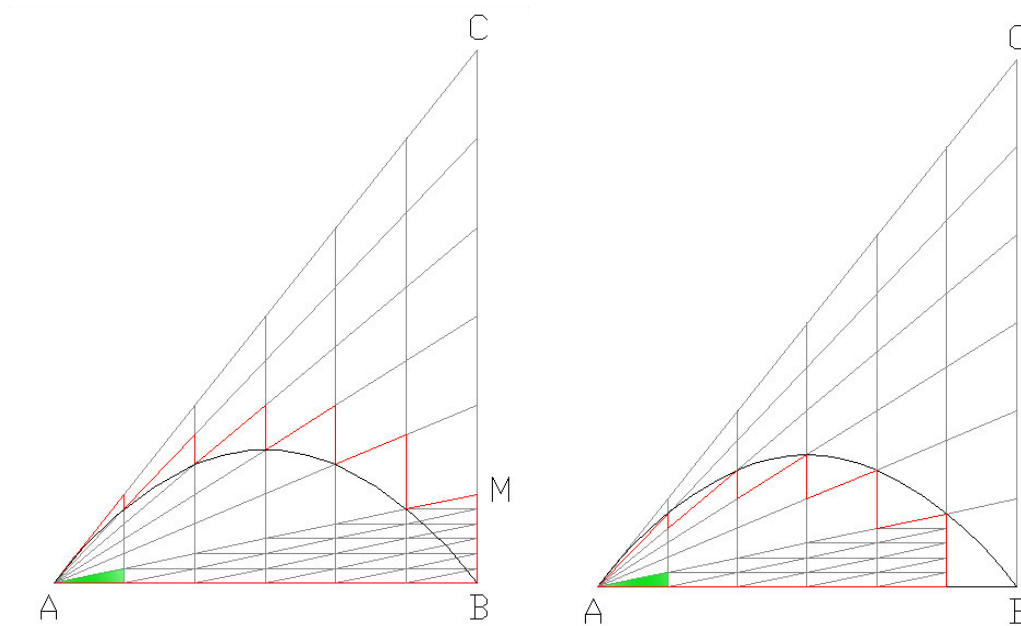
1 - https://it.wikipedia.org/wiki/Archimede#Quadratura_della_parabola
2 - http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/GeoClassCap4.pdf (pag. 218)
3 - http://youtu.be/6S-vGLJR0iM
4 - Formula di Faulhaber:
https://it.wikipedia.org/wiki/Somma_di_potenze_di_interi_successivi

Quadratura della parabola

(un’altra dimostrazione)

La dimostrazione precedente ha fatto seguito ad un’altra dimostrazione, poi abbandonata, che affrontava il problema da un differente punto di vista. Mi sembra opportuno pubblicare qui anche quest’ultima, per alcuni suoi contenuti degni di nota.

Proposizione 16

L'area del segmento parabolico é un terzo dell'area del triangolo ABC.

Dimostrazione

Siano *AB* e *BC* divisi in *6* parti uguali e sia il triangolo di colore verde l'unità di misura delle aree.

Il triangolo *ABC* contiene 6^3 triangoli verdi.

Se la proposizione fosse vera, il segmento parabolico ne conterrebbe:

$A_{SP} = 6^3 /3 = 72$

La figura circoscritta ne contiene:

$A(cir.) = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 11$

La figura inscritta ne contiene:

$A(ins.) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 11$

La semi somma di queste due quantità fornisce (in prima approssimazione) il numero di triangoli verdi contenuti nel segmento parabolico:

$A_{(med.)} = (11 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 11)/2 = 73$

Abbiamo fin qui esaminato il caso generico con *6* divisioni su *AB* e *BC*, ottenendo lo scarto di un triangolo verde dal valore presunto dell'area del segmento parabolico A_{SP} e quindi una differenza relativa fra le due aree che vale solo *1/72*, già con una divisione così grossolana.

Estendendo i risultati ad un numero *n* qualsiasi di divisioni, si ha:

$ABC = n^3$

$A_{SP} = n^3/3$

E per la semi somma delle aree circoscritta ed inscritta:

$$A_{(med.)} = [(2n-1) \cdot 1 + (2n-3) \cdot 3 + (2n-5) \cdot 5 + ... + (2n-(2n-1)) \cdot (2n-1)]/2 =$$
$$= [2n \sum_1^n (2n-1) - \sum_1^n (2n-1)^2]/2 =$$
$$= [2n^3 - (4n^3-n)/3]/2 =$$
$$= n^3 - (4n^3-n)/6$$

Indichiamo con Δu la differenza assoluta (numero di triangoli verdi unitari) fra le aree $A_{(med.)}$ e A_{SP} e con Δr la differenza relativa. Si ha:

$$\Delta u = A_{(med.)} - A_{SP} = n^3 - (4n^3-n)/6 - n^3/3$$

$$\Delta u = n/6$$

$$\Delta r = \Delta u / A_{SP} = (n/6)/(n^3/3)$$

$$\Delta r = n/2n^3$$

Questi risultati, per come sono stati ottenuti, valgono sicuramente per ogni numero intero positivo *n*. Una conferma di ciò la si può avere considerando i valori nella tabella che segue, calcolata su un foglio elettronico:

n	AWB	A(cir.)	A(ins.)	A(med.)	Δu	Δr
6	72	91	55	73	1	0,013888889
12	576	650	506	578	2	0,003472222
24	4608	4900	4324	4612	4	0,000868056
48	36864	38024	35720	36872	8	0,000217014
96	294912	299536	290320	294928	16	0,000054253
192	2359296	2377760	2340896	2359328	32	0,000013563
384	18874368	18948160	18800704	18874432	64	0,000003391

Il principio di induzione assicura che Δu = *n/6* per ogni numero intero positivo *n*.

La scelta (fortunata) dei triangoli verdi per le unità di misura delle aree, ha quindi permesso di esprimere in termini di *n* (numero delle divisioni) tutte le grandezze caratteristiche del teorema, cioè le aree e gli scarti Δ.

Si tratta ora, per concludere la dimostrazione, di considerare semplicemente la convergenza della successione numerica che fornisce i valori di Δr per ogni *n*.

Risulta infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^3} = 0$$

cioè, Δr tende a zero per numero di divisioni *n* tendente a infinito, limite in cui si ha la coincidenza delle figure e quindi l'uguaglianza delle aree al valore di *ABC/3*, che è quanto si voleva dimostrare.

Osservazione

Nella dimostrazione sopra esposta è "nascosta" una via per ricavare la formula che calcola la somma dei quadrati dei primi *n* numeri dispari.
Esaminando il foglio elettronico sopra riportato, ci si imbatte nella stupefacente regolarità dei valori di Δu (ottenuti per differenza) e cioè nella evidente relazione:

Δu = *n/6* (a)

la cui validità per ogni *n* intero positivo risulta subito dimostrata per induzione.
Cercando di ottenere algebricamente la *(a)*, si scrive:

$\Delta u = A(med.) - A_{SP} =$

$= [2n \sum_1^n (2n-1) - \sum_1^n (2n-1)^2]/2 - n^3/3$

cioè:

$\Delta u = [2n^3 - (S)]/2 - n^3/3$

dove *(S)* è una espressione in *n* (per ora ignota) che calcola la somma dei quadrati dei primi *n* numeri dispari. Essendo certi della validità della *(a)*, si scrive quindi:

$n/6 = [2n^3 - (S)]/2 - n^3/3$

ottenendo:

$(S) = (4n^3 - n)/3$

che è quanto si voleva ottenere.

Somma dei quadrati dei primi *”n”* numeri naturali

Eseguiremo qui visivamente la derivazione della formula per calcolare il *numero piramidale quadrato*, ovvero la somma dei quadrati dei primi *n* numeri naturali, utilizzando un modello geometrico tridimensionale.

Introduzione

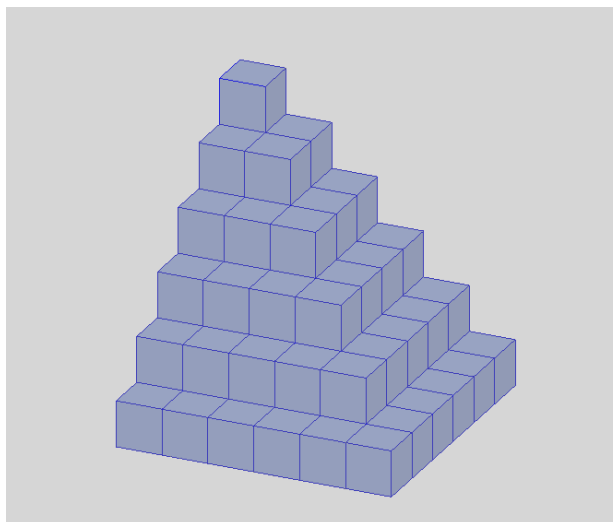
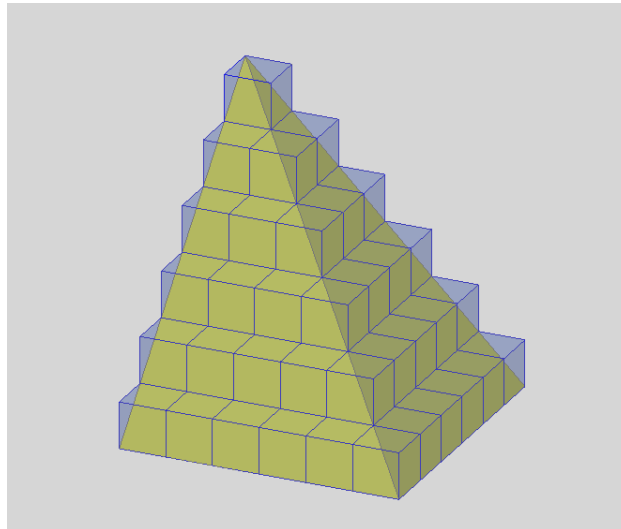
In matematica, il numero piramidale quadrato è un numero figurato che rappresenta il numero di sfere accatastate in una piramide a base quadrata. L'*n*-esimo numero di questo tipo è quindi la somma dei quadrati dei primi *n* numeri naturali. La formula che calcola tale somma, riportata nella proposizione, è stata ottenuta con un procedimento algebrico, in maniera indiretta. George Polya, nel suo libro *La scoperta matematica*, presenta tale soluzione dicendola “piovuta dal cielo”, ottenuta algebricamente con un trucco, come un coniglio estratto da un cilindro. Nella dimostrazione geometrica che segue si è ottenuto lo stesso risultato procedendo in maniera diretta.

Proposizione

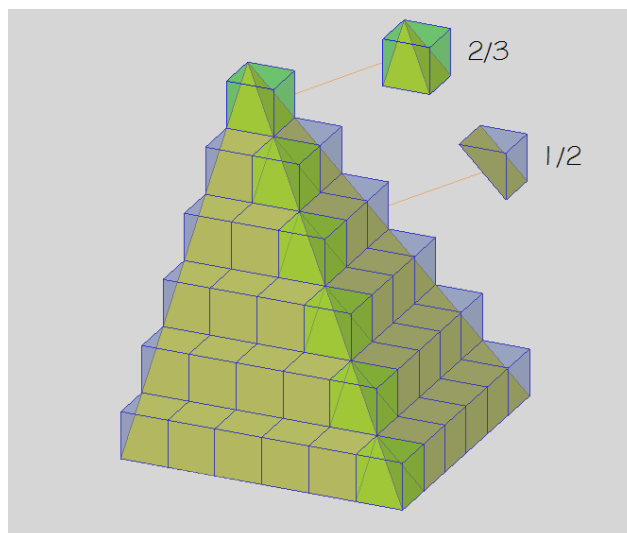
La somma dei quadrati dei primi *n* numeri naturali è data dal numero piramidale quadrato, espresso dalla seguente formula:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Dimostrazione

Costruiamo un modello geometrico tridimensionale che rappresenti la somma dei quadrati dei primi *6* numeri naturali P_6, utilizzando mattoni cubici di volume unitario (vedi ai links la seconda animazione):

Inseriamo ora nella costruzione una piramide (in giallo), inscritta nel modo seguente:

Sia V_6 il volume della piramide inscritta. Per ottenere il volume totale P_6 della costruzione, basta sommare al volume V_6 della piramide in giallo, il volume in eccesso che si trova all'esterno della piramide stessa.

Tale eccesso vale:

- *2/3* per ciascun cubetto unitario posto sullo spigolo centrale della piramide;
- *1/2* per ciascun cubetto unitario che forma i gradini della costruzione.

Eseguendo i calcoli, si ha:

$$P_6 = V_6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10) =$$

$$= V_6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

Applicando il *principio di induzione*, possiamo scrivere che, in generale:

$$P_n = V_n + \frac{2n}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n^3}{3} + \frac{2n}{3} + \frac{n^2 + n}{2} - n$$

cioè:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Che è la formula che si cercava.

Links

1 - https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_piramidale_quadrato

2 - http://youtu.be/r9XcoQNeBGQ

Bibliografia

George Polya (1967), *La scoperta matematica - Vol. II*, Feltrinelli

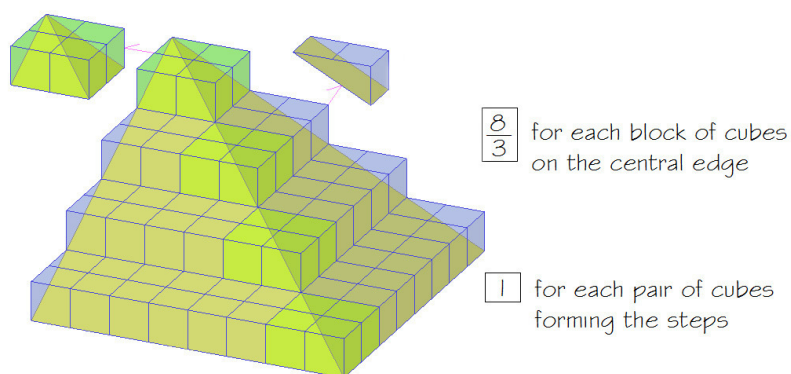
Somma dei quadrati dei primi ”*n*” numeri pari e dispari

Il metodo impiegato nella dimostrazione precedente, che diremo “*metodo della piramide inscritta”,* si applica altrettanto bene ai casi di somme dei quadrati dei primi *n* numeri pari e dispari.

Somma dei quadrati dei primi ”*n*” numeri pari

La somma dei quadrati dei primi *n* numeri *pari* si ottiene dalla nota formula:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \frac{2(2n^3+3n^2+n)}{3}$$

Procedendo infatti con il metodo introdotto si ottiene alla fine, per i volumi eccedenti, il seguente risultato:

Il volume della costruzione S_4 si calcola sommando al volume V_4 della piramide inscritta il volume complessivo delle parti eccedenti:

$$S_4 = V_4 + \frac{8}{3}\cdot 4 + 2\cdot(2+4+6)$$

Possiamo quindi scrivere che, in generale:

$$S_n = V_n + \frac{8n}{3} + 2(n^2-n) = \frac{(2n)^3}{6} + \frac{8n}{3} + 2(n^2-n)$$

cioè:

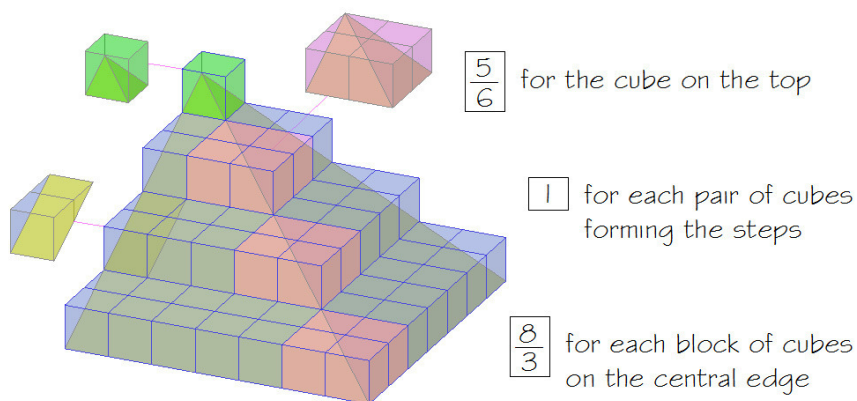
$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \frac{2(2n^3+3n^2+n)}{3}$$

che è la formula che si cercava.

Somma dei quadrati dei primi "*n*" numeri dispari

La somma dei quadrati dei primi *n* numeri *dispari* si ottiene dalla formula:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$$

Anche qui, procedendo con lo stesso metodo, si ottengono alla fine i seguenti volumi in eccesso:

Il volume della costruzione S_4 si calcola sommando al volume V_4 della piramide inscritta il volume complessivo delle parti eccedenti:

$$S'_4 = V'_4 + \frac{8}{3}\cdot 3 + \frac{5}{6} + 2\cdot(1+3+5)$$

Possiamo quindi scrivere che, in generale:

$$S'_n = V'_n + \frac{8(n-1)}{3} + \frac{5}{6} + 2(n-1)^2 = \frac{(2n-1)^3}{6} + \frac{8(n-1)}{3} + \frac{5}{6} + 2(n-1)^2$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$$

che è la formula che si cercava.

Derivazioni algebriche

Per la somma dei quadrati dei numeri pari, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \sum_{k=1}^{n}4k^2 = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 =$$

$$= 4\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{2(2n^3+3n^2+n)}{3}$$

Per la somma dei quadrati dei numeri dispari, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) \;= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + n =$$

$$= 4\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - 4\frac{n^2+n}{2} + n = \frac{4n^3-n}{3}$$

Vedi le animazioni nell'appendice del filmato pubblicato all'indirizzo:
http://youtu.be/r9XcoQNeBGQ

Somma dei cubi dei primi *”n”* numeri naturali

Dimostreremo qui visivamente il teorema di Nicomaco sulla somma dei cubi dei primi *n* numeri naturali, utilizzando la manipolazione di un modello geometrico tridimensionale.

Introduzione

In teoria dei numeri, la somma dei primi *n* cubi è data dal quadrato dell’ *n*-simo numero triangolare, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

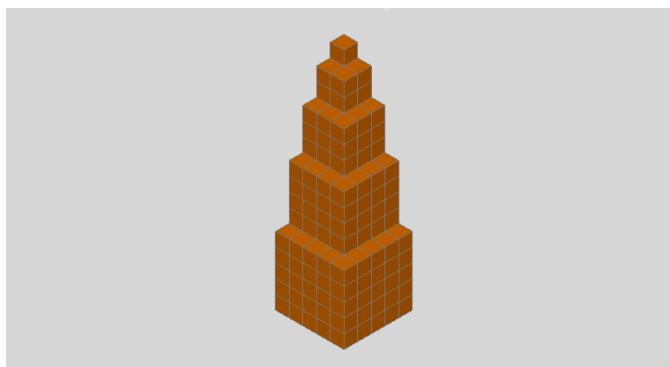
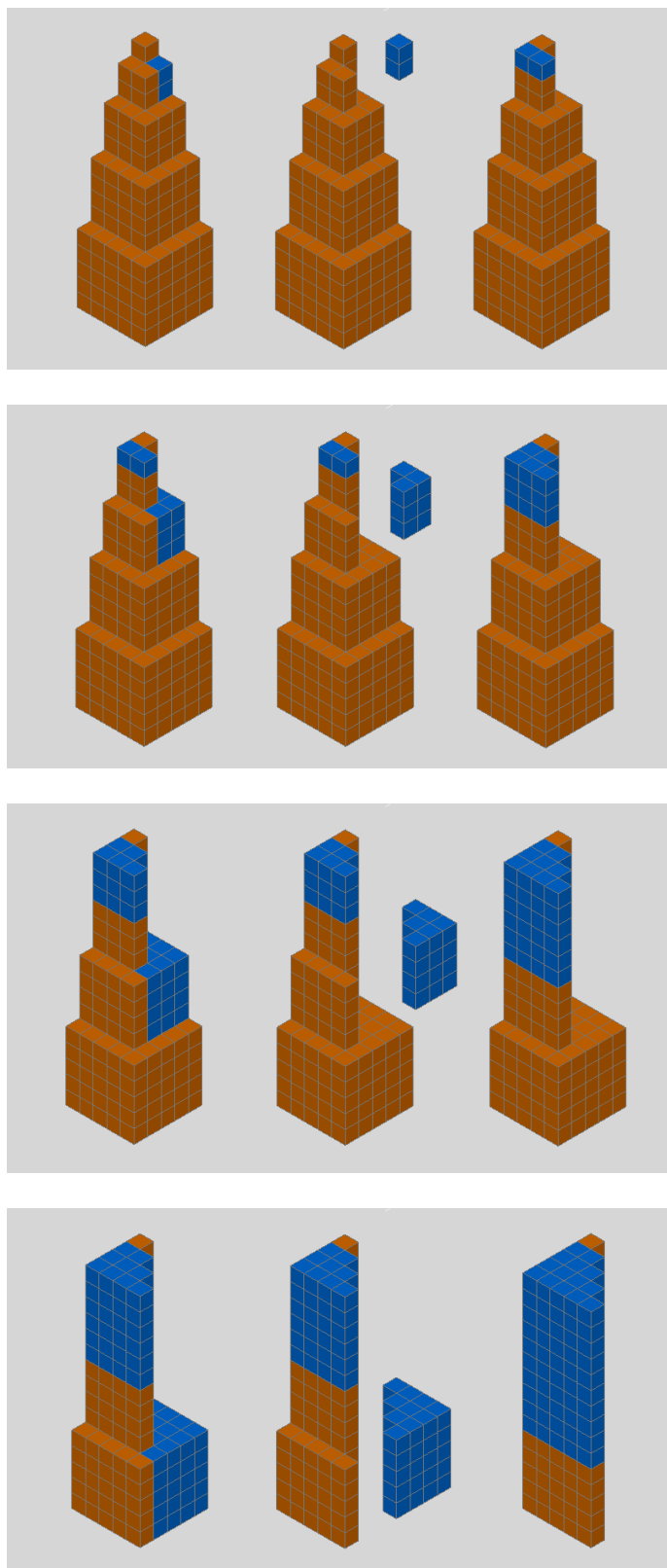
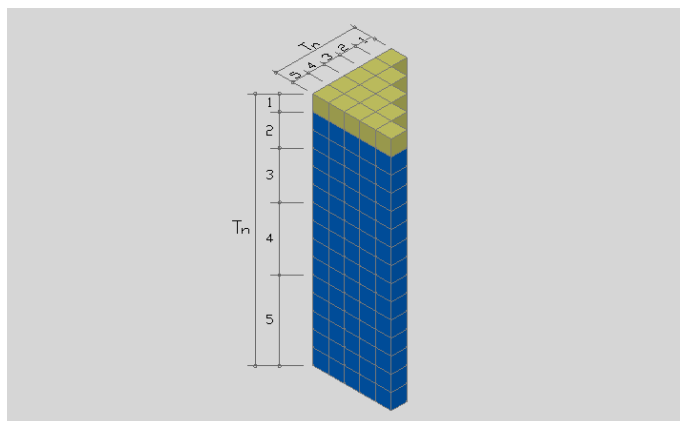
Questa identità è talvolta chiamata t*eorema di Nicomaco*, dal nome del matematico greco dell'età ellenistica, Nicomaco di Gerasa, che ne diede una dimostrazione aritmetica. Molti matematici hanno studiato questa uguaglianza, dimostrandola in molti modi diversi. L’idea di dimostrare visivamente l’identità di Nicomaco non è nuova. Roger B. Nelsen, nel suo lavoro *Proofs without Words* (1993) ne presenta ben sette versioni diverse. Il pregio delle dimostrazioni visive è quello di fornire talvolta, come nel presente lavoro, una evidenza grafica della soluzione cercata.

Proposizione: *La somma dei cubi dei primi n numeri naturali è data dal quadrato dell’ n-simo numero triangolare:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = T_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

essendo il numero triangolare uguale alla somma dei primi *n* numeri naturali.

Dimostrazione

Costruiamo un modello geometrico tridimensionale che rappresenti la somma dei cubi dei primi 5 numeri naturali, utilizzando mattoni cubici di volume unitario:

Nel tentativo di ottenere da questo modello una figura equivalente, che dia evidenza dell'identità da dimostrare, operiamo sul modello una trasformazione induttiva, spostando i cubetti unitari nel modo seguente:

L'induttività del processo sta nel fatto che, in ciascun cubo della somma, i cubetti unitari da spostare sono disposti ordinatamente in *1+2+3+…+(k-1)* colonne, ciascuna di altezza *k*.
Il risultato finale della trasformazione è sempre, per qualsiasi *n*, uno pseudo-parallelepipedo, avente per base una rappresentazione geometrica del numero triangolare *Tn*, e per altezza il numero *Tn* stesso, che rimane invariato durante la trasformazione.

Appare quindi evidente che, il numero totale dei cubetti unitari, che dà la somma dei cubi dei primi *n* numeri naturali, vale:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = T_n{}^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

Che è l'identità che si voleva dimostrare.

Links

1 - http://en.wikipedia.org/wiki/Squared_triangular_number

2 - http://youtu.be/XM2plLoJkRk

Bibliografia

Nelsen, Roger B. (1993), *Proofs without Words*, Cambridge University

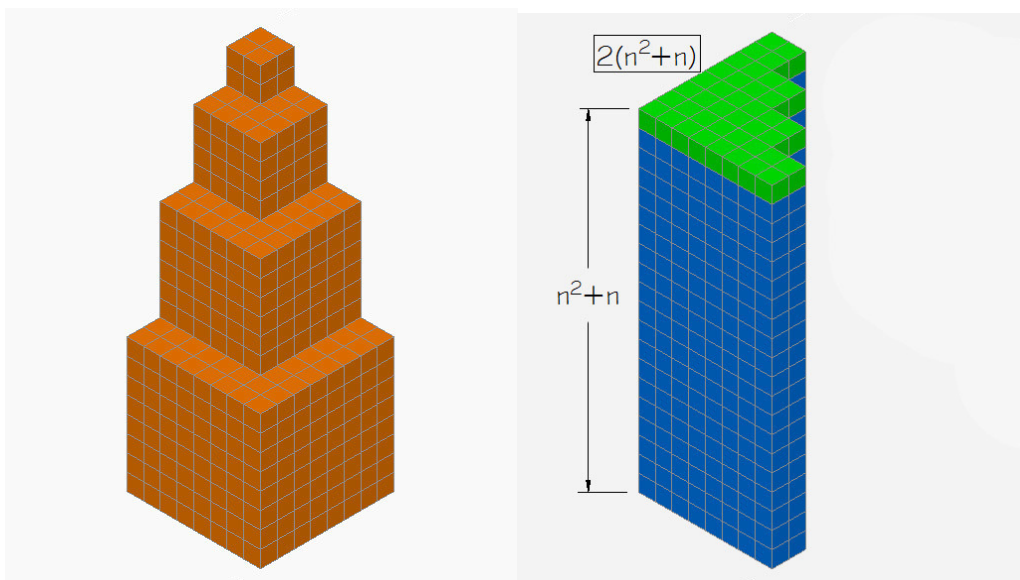
Somma dei cubi dei primi *”n”* numeri pari e dispari

Il metodo impiegato nella dimostrazione precedente, che diremo “*metodo delle trasformazioni successive”,* si applica altrettanto bene ai casi di somme dei cubi dei primi *n* numeri pari e dispari.

Somma dei cubi dei primi *”n”* numeri pari

La somma dei cubi dei primi *n* numeri *pari* si ottiene dalla nota formula:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = 2(n^2+n)^2$$

Procedendo infatti con il metodo introdotto si ottiene:

cioè, uno pseudo-parallelepipedo avente la base formata da

$$4\cdot(1+2+3+....+n) = 2(n^2+n)$$

cubi unitari, e l’altezza, che resta invariata, pari a

(n^2+n) cubi unitari.

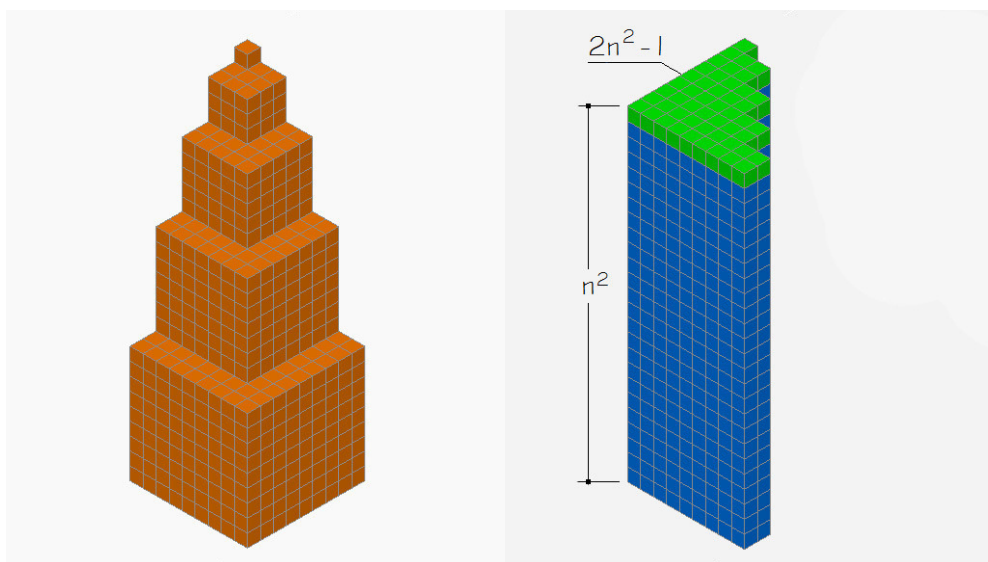
Per cui, il volume della figura, cioè la somma che si cercava, risulta:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = 2(n^2+n)^2$$

Somma dei cubi dei primi *"n"* numeri dispari

La somma dei cubi dei primi *n* numeri *dispari* si ottiene dalla formula:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Anche qui, procedendo con la trasformazione, si ottiene:

Per cui, calcolando il numero dei cubetti unitari, risulta:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

che è la formula che si cercava.

Algebraic derivations

For the sum of cubes of even numbers, we have:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = \sum_{k=1}^{n}8k^3 = 8\sum_{k=1}^{n}k^3 = 8\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = 2(n^2+n)^2$$

For the sum of cubes of odd numbers, we have:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(8k^3-12k^2+6k-1) =$$

$$= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 - 12\sum_{k=1}^{n}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n}k - n = n^2(2n^2-1)$$

Vedi le animazioni nell'appendice del filmato pubblicato all'indirizzo:
http://youtu.be/XM2plLoJkRk

Somma delle prime "*n*" somme di potenze

Consideriamo le somme delle potenze di interi successivi:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + ... + n^m \qquad (1)$$

che, come sappiamo, si calcolano con le espressioni polinomiali di *Faulhaber*, nel modo seguente:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}\left(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}\left(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2\right)$$

. . . .(la tavola prosegue indefinitamente).

Ciascuna di queste espressioni genera, al variare di *n*, una successione numerica crescente, del tipo di quella che si ottiene per *m*=2:

1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, ……

che è la successione dei *numeri piramidali quadrati.*

Ci proponiamo di trovare un modo per calcolare, data una qualsiasi di dette successioni, la somma dei primi suoi *n* termini, cioè la somma:

$$\sum_{k=1}^{n} (1^m + 2^m + ... + n^m)$$

Una opportunità per ottenere questo risultato ce la offre la seguente tabella (nota A):

1^m	1^m	1^m	1^m	1^m	1^m	1^m	1^m	…	1^m	1^m
2^m	2^m	2^m	2^m	2^m	2^m	2^m	2^m	…	2^m	2^m
3^m	3^m	3^m	3^m	3^m	3^m	3^m	3^m	…	3^m	3^m
4^m	4^m	4^m	4^m	4^m	4^m	4^m	4^m	…	4^m	4^m
5^m	5^m	5^m	5^m	5^m	5^m	5^m	5^m	…	5^m	5^m
6^m	6^m	6^m	6^m	6^m	6^m	6^m	6^m	…	6^m	6^m
7^m	7^m	7^m	7^m	7^m	7^m	7^m	7^m	…	7^m	7^m
:	:	:	:	:	:	:	:	…	:	:
$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$	…	$(n-1)^m$	$(n-1)^m$
n^m	n^m	n^m	n^m	n^m	n^m	n^m	n^m	…	n^m	n^m

Descriviamone il contenuto:

- Sommando il contenuto di ciascuna colonna (caselle rosse + nere), si ottiene la somma delle prime *n* potenze *m*-sime, che (in omaggio a Faulhaber) indichiamo con F_m:

$$F_m = \sum_{k=1}^{n} k^m$$

e il contenuto dell'intera tabella sarà quindi:

$$(n+1)F_m = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^m$$

- La sezione in nero contiene, in ciascuna riga, la quantità:

$$k^m \cdot k = k^{(m+1)}$$

Sommando il contenuto di tutte le righe, si ottiene la somma delle prime *n* potenze (*m+1*)-sime:

$$F_{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} k^{(m+1)}$$

- La sezione in rosso contiene, nelle colonne, la successione delle somme F_m. L'intera sezione contiene la quantità che vogliamo calcolare, cioè la (1):

$$\sum_{k=1}^{n} (1^m + 2^m + \dots\dots + n^m) = \sum_{k=1}^{n} F_m$$

La quantità che cerchiamo si ottiene quindi sottraendo al contenuto dell'intera tabella, il contenuto delle caselle nere, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} F_m = (n+1)F_m - F_{(m+1)} \tag{2}$$

Eseguendo i calcoli algebrici per m = 1, 2, 3, si ottiene:

***m* = 1**

$$\sum_{k=1}^{n} F_1 = (n+1)F_1 - F_2$$

$$= (n+1)\frac{n^2+n}{2} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \boxed{\frac{n^3+3n^2+2n}{6}}$$

***m* = 2**

$$\sum_{k=1}^{n} F_2 = (n+1)F_2 - F_3$$

$$= (n+1)\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \left[\frac{n^2+n}{2}\right]^2 = \boxed{\frac{n^4+4n^3+5n^2+2n}{12}}$$

***m* = 3**

$$\sum_{k=1}^{n} F_3 = (n+1)F_3 - F_4$$

$$= (n+1)\left[\frac{n^2+n}{2}\right]^2 - \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30} = \boxed{\frac{3n^5+15n^4+25n^3+15n^2+2n}{60}}$$

Le verifiche con Excel hanno dato esito positivo.

Riportiamo di seguito la scansione del test eseguito per m=3, fino ad n=7:

n	n^3	F_3	A	B
1	1	1	1	1
2	8	9	10	10
3	27	36	46	46
4	64	100	146	146
5	125	225	371	371
6	216	441	812	812
7	343	784	1596	1596

La colonna A contiene le somme così calcolate: casella a sinistra + casella in alto. La colonna B contiene le somme calcolate inserendo la formula da verificare.

Le espressioni polinomiali generate dalla (2) costituiscono la naturale estensione di quelle elencate all'inizio di questo articolo. La formula generale per ottenerle in maniera diretta si scrive, nella notazione compatta della formula di Faulhaber, nel modo seguente:

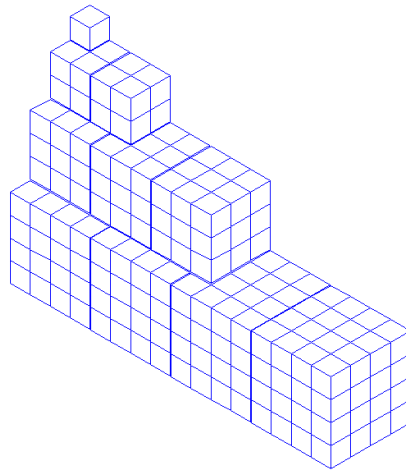
$$\sum_{k=1}^{n} F_m = (n+1)F_m - F_{(m+1)}$$

$$= \frac{n+1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k(n+1)^{m+1-k} - \frac{1}{m+2}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+2}{k}B_k(n+1)^{m+2-k} \quad (3)$$

dove le quantità B_k sono i *numeri di Bernoulli*.

Questa formula calcola, per ogni numero naturale n e per ogni potenza m, la somma delle prime n somme di potenze.

Note

(A) – Questa tabella è nata dall'idea di rappresentare, con il solito modello tridimensionale a cubetti, la somma delle quarte potenze dei primi 4 numeri naturali, semplicemente replicando affiancate, 2, 3 e 4 volte, le figure di 2^3, 3^3 e 4^3, come nella figura seguente:

Ho poi trovato più agevole ragionare su uno schema come quello della tabella.

(B) – Non so se sia possibile eseguire uno sviluppo della formula (3), nella sua notazione compatta, per ottenerne una più semplice.

Animazione: https://www.youtube.com/watch?v=PnIEPqFtcQc

Una relazione fra numeri figurati

Il "numero piramidale quadrato" può essere scomposto nella somma di due numeri tetraedrici meno un numero triangolare, cioè nel modo seguente:

$$P_n = 2\Theta_n - T_n \tag{1}$$

Lo si può vedere facilmente in due modi diversi:

- Si possono incolonnare due sequenze di numeri tetraedrici:
  1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, ……
  1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, ……
  ed una sequenza di numeri triangolari:
  1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, ……
  e sottrarre quest'ultima dalla somma delle prime due, ottenendo:
  1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, ……

- Oppure, sostituendo al secondo membro della (1) le formule risolventi:

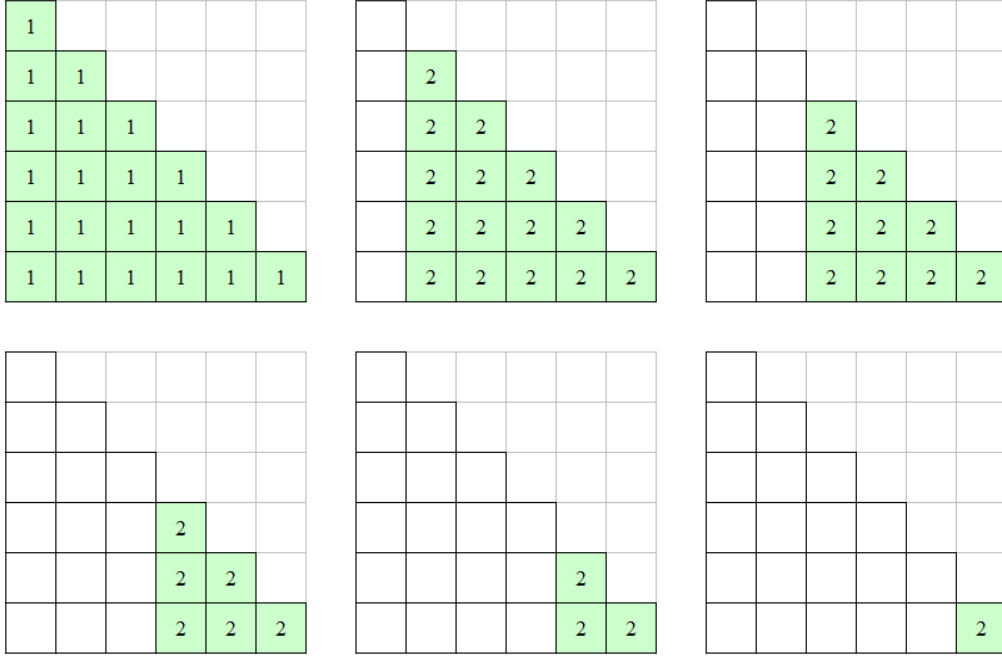
$$P_n = 2\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \tag{2}$$

Ma così facendo si eseguono delle semplici verifiche.

Sono convinto che di relazioni del tipo proposto nella (1) ne esistano molte. Si potrebbero cercare con un programma di calcolo che analizzi le corrispondenze fra i valori delle successioni dei numeri figurati, come abbiamo fatto nella prima verifica. Tuttavia, gli eventuali risultati di una tale ricerca andrebbero spiegati e dimostrati per ogni *n*.

Vi faccio vedere come ho scoperto la proposizione, dandone nel contempo la dimostrazione.

Consideriamo uno schema già utilizzato per rappresentare il numero piramidale quadrato P_6:

Questo schema può essere visto come la sovrapposizione di 6 “layers” omogenei:

che rappresentano, in termini di numeri triangolari, le seguenti quantità:

T_6, $2T_5$, $2T_4$, $2T_3$, $2T_2$, $2T_1$

perciò, sommando possiamo scrivere:

$$P_6 = T_6 + 2(T_5 + T_4 + T_3 + T_2 + T_1) = T_6 + 2\sum_{k=1}^{5} T_k$$

Ma la somma dei primi 5 numeri triangolari è il numero tetraedrico Θ_5, quindi:

$$P_6 = T_6 + 2\Theta_5 = T_6 + 2(\Theta_6 - T_6) = 2\Theta_6 - T_6$$

Anche qui, la generalizzazione segue dalla considerazione che il passaggio, da un certo numero n al successivo, è un processo *induttivo* che si realizza aggiungendo:

- una riga con la sequenza degli $n+1$ numeri dispari, cioè P_{n+1}, nello schema di P_n in figura 1;

- due layers, T_n e T_{n+1} (che come si sa equivalgono al P_{n+1} aggiunto al punto precedente), nella seconda figura.

Si può quindi dire che, in generale, il numero piramidale quadrato P_n può esprimersi come:

$$P_n = 2\Theta_n - T_n$$

Che è la relazione (1) proposta.

E' nota la storia della derivazione algebrica della formula per P_n al primo membro della (2). Mi chiedevo se, fatte le opportune verifiche cronologiche sull'uscita delle tre formule componenti, la (2) stessa (insieme alla demo del presente articolo) non possa essere considerata come "un'altra via" per ottenere la formula della somma P_n.

La congettura di Goldbach con Excel

In teoria dei numeri, la “congettura di Goldbach” è un vecchio problema irrisolto che afferma:

“ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come la somma di due numeri primi, non necessariamente distinti”.

Per farmi un’idea sulla validità della congettura, ho condotto un’indagine esplorativa, facendo uso, come al solito, degli strumenti informatici a mia disposizione.

Si definiscono “partizioni di Goldbach” tutti i diversi modi di scrivere un numero pari N come somma di due numeri primi:

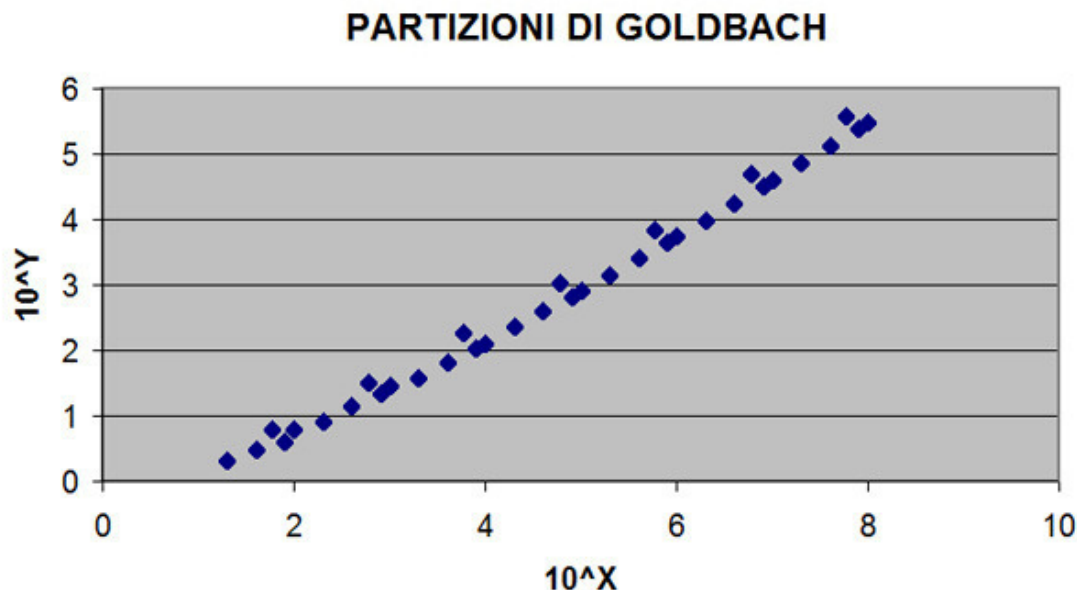
$$N = p + q$$

La congettura di Goldbach afferma quindi che ogni numero pari N ha almeno una partizione di Goldbach.
Impiegando Excel, ho costruito una sorta di tavola “pitagorica” di addizione, per ottenere tutti le somme possibili tra coppie di numeri primi, nel modo seguente:

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
2	4																								
3		6	8	10	14	16	20	22	26	32	34	40	44	46	50	56	62	64	70	74	76	82	86	92	100
5			10	12	16	18	22	24	28	34	36	42	46	48	52	58	64	66	72	76	78	84	88	94	
7				14	18	20	24	26	30	36	38	44	48	50	54	60	66	68	74	78	80	86	90	96	
11					22	24	28	30	34	40	42	48	52	54	58	64	70	72	78	82	84	90	94	100	
13						26	30	32	36	42	44	50	54	56	60	66	72	74	80	84	86	92	96		
17							34	36	40	46	48	54	58	60	64	70	76	78	84	88	90	96	100		
19								38	42	48	50	56	60	62	66	72	78	80	86	90	92	98			
23									46	52	54	60	64	66	70	76	82	84	90	94	96				
29										58	60	66	70	72	76	82	88	90	96	100					
31											62	68	72	74	78	84	90	92	98						
37												74	78	80	84	90	96	98							
41													82	84	88	94	100								
43														86	90	96									
47															94	100									
53																									
59																									
61																									
67																									
71																									
73																									
79																									
83																									
89																									
97																									

N		N		N	
4	1	52	3	1000	28
6	1	54	5		
8	1	56	3	10000	127
10	2	58	4		
12	1	60	6	100000	810
14	2	62	3		
16	2	64	5	1000000	5402
18	2	66	6		
20	2	68	2	10000000	38807
22	3	70	5		
24	3	72	6	100000000	291400
26	3	74	5		
28	2	76	5		
30	3	78	7		
32	2	80	4		
34	4	82	5		
36	4	84	8		
38	2	86	5		
40	3	88	4		
42	4	90	9		
44	3	92	4		
46	4	94	5		
48	5	96	7		
50	4	98	3		
		100	6		

Come si vede, la tavola fornisce un numero pari N ad ogni incrocio tra due numeri primi qualsiasi, e può essere estesa all’infinito. La colorazione facilita il conteggio delle partizioni di Goldbach per i numeri pari N da *4* a *100*. I risultati sono riportati nelle prime due colonne verdi a destra della tabella.
Ricercando su Internet, ho poi scoperto nel sito del Prof. Bo, un utilissimo programma in *javascript* per trovare le partizioni di Goldbach di singoli numeri pari. Ho quindi aggiunto subito, nella figura precedente, il numero delle partizioni per $N = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ e 10^8.

Con lo stesso programma ho calcolato poi le partizioni per alcuni valori intermedi ai precedenti, ottenendo in un grafico log-log la seguente dispersione XY:

Il grafico mostra una distribuzione delle partizioni di Goldbach intorno ad una curva che presenta una leggera concavità verso l'alto, indice di continua crescita. Le partizioni appaiono quindi molteplici, in corrispondenza di ciascun numero pari *N* che si considera, e sembra agevole e sicura la costruzione di almeno una sequenza completa di numeri pari, fino al numero *N* considerato. Utilizzando la tavola di addizione, ho personalmente testato (a spot) un conteggio sequenziale, che si snoda entro un range di ordinate molto sottile (poche centinaia di unità), fino alla ragguardevole ascissa di 10^{12}! Ve ne mostro uno stralcio intorno a 10^5. I numeri primi me li ha forniti un altro programma in javascript, che ho pure inserito nei link in fondo all'articolo.

	99089	99103	99109	99119	99131	99133	99137	99139	99149	99173	99181	99191	99223	99233	99241	99251	99257	99259	99277	99289	99317	99347	99349	99367
3	99092	99106	99112	99122	99134	99136	99140	99142	99152	99176	99184	99194	99226	99236	99244	99254	99260	99262	99280	99292	99320	99350	99352	99370
5	99094	99108	99114	99124	99136	99138	99142	99144	99154	99178	99186	99196	99228	99238	99246	99256	99262	99264	99282	99294	99322	99352	99354	99372
7	99096	99110	99116	99126	99138	99140	99144	99146	99156	99180	99188	99198	99230	99240	99248	99258	99264	99266	99284	99296	99324	99354	99356	99374
11	99100	99114	99120	99130	99142	99144	99148	99150	99160	99184	99192	99202	99234	99244	99252	99262	99268	99270	99288	99300	99328	99358	99360	99378
13	99102	99116	99122	99132	99144	99146	99150	99152	99162	99186	99194	99204	99236	99246	99254	99264	99270	99272	99290	99302	99330	99360	99362	99380
17	99106	99120	99126	99136	99148	99150	99154	99156	99166	99190	99198	99208	99240	99250	99258	99268	99274	99276	99294	99306	99334	99364	99366	99384
19	99108	99122	99128	99138	99150	99152	99156	99158	99168	99192	99200	99210	99242	99252	99260	99270	99276	99278	99296	99308	99336	99366	99368	99386
23	99112	99126	99132	99142	99154	99156	99160	99162	99172	99196	99204	99214	99246	99256	99264	99274	99280	99282	99300	99312	99340	99370	99372	99390
29	99118	99132	99138	99148	99160	99162	99166	99168	99178	99202	99210	99220	99252	99262	99270	99280	99286	99288	99306	99318	99346	99376	99378	99396
31	99120	99134	99140	99150	99162	99164	99168	99170	99180	99204	99212	99222	99254	99264	99272	99282	99288	99290	99308	99320	99348	99378	99380	99398
37	99126	99140	99146	99156	99168	99170	99174	99176	99186	99210	99218	99228	99260	99270	99278	99288	99294	99296	99314	99326	99354	99384	99386	99404
41	99130	99144	99150	99160	99172	99174	99178	99180	99190	99214	99222	99232	99264	99274	99282	99292	99298	99300	99318	99330	99358	99388	99390	99408
43	99132	99146	99152	99162	99174	99176	99180	99182	99192	99216	99224	99234	99266	99276	99284	99294	99300	99302	99320	99332	99360	99390	99392	99410
47	99136	99150	99156	99166	99178	99180	99184	99186	99196	99220	99228	99238	99270	99280	99288	99298	99304	99306	99324	99336	99364	99394	99396	99414
53	99142	99156	99162	99172	99184	99186	99190	99192	99202	99226	99234	99244	99276	99286	99294	99304	99310	99312	99330	99342	99370	99400	99402	99420
59	99148	99162	99168	99178	99190	99192	99196	99198	99208	99232	99240	99250	99282	99292	99300	99310	99316	99318	99336	99348	99376	99406	99408	99426
61	99150	99164	99170	99180	99192	99194	99198	99200	99210	99234	99242	99252	99284	99294	99302	99312	99318	99320	99338	99350	99378	99408	99410	99428
67	99156	99170	99176	99186	99198	99200	99204	99206	99216	99240	99248	99258	99290	99300	99308	99318	99324	99326	99344	99356	99384	99414	99416	99434
71	99160	99174	99180	99190	99202	99204	99208	99210	99220	99244	99252	99262	99294	99304	99312	99322	99328	99330	99348	99360	99388	99418	99420	99438

In corrispondenza di ciascun numero pari conteggiato si trova la sua partizione “minima”, ottenibile con il programma di calcolo delle partizioni visto sopra.
Nelle tabelle del test si può notare una sorprendente densità di dati utili intorno all’asse delle ascisse, che consente un agevole conteggio in sequenza dei numeri pari. Tale circostanza sarebbe dovuta a due fattori diversi che sembrano agire in concomitanza:

- la distanza (media) fra due numeri primi consecutivi cresce molto lentamente al crescere di *N*, essendo dello stesso ordine di grandezza di *log N*;
- al crescere di *N* si incontrano, con considerevole frequenza, numeri primi gemelli (in giallo).

Per effetto di una tale azione combinata, accade che le ascisse si diradano e si accumulano continuamente, in modo tale che i dati risultano distribuiti entro un’area delimitata superiormente dall’asse delle ascisse ed inferiormente da una curva ad andamento sinusoidale, a sua volta inviluppata, approssimativamente, dalla funzione *log N* di cui sopra. Si potrebbe studiare una tale configurazione alla ricerca di serie argomentazioni statistiche e probabilistiche a sostegno della congettura di Goldbach.

La maggior parte dei matematici ritiene che la congettura sia vera. Se non lo fosse, esisterebbe almeno un numero pari che non è la somma di due numeri primi, ossia un *contro-esempio*. Per trovarlo, si potrebbe impiegare il programma di calcolo delle partizioni (opportunamente limitato al solo calcolo delle partizioni minime, le prime di ogni lista) per verificare se, in corrispondenza di numeri pari sempre più grandi, esista sempre almeno una partizione di Goldbach. La ricerca svolta finora non ha fornito alcun contro-esempio: ad oggi è stato verificato che ogni numero pari inferiore a 4×10^{18} è la somma di due numeri primi.

Tuttavia, approcci al problema di Goldbach come quello da noi usato possono solo suggerire un parere (favorevole alla veridicità nel nostro caso) ma non dimostrano la congettura in maniera rigorosa, cioè per ogni *N*.

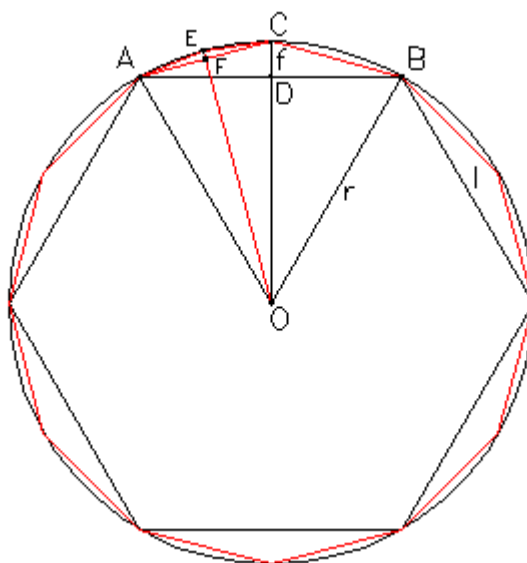
Il problema resta quindi tutt’ora aperto.

Links

- http://utenti.quipo.it/base5/numeri/jsgolbachpartiz.htm
- http://www.walter-fendt.de/m14i/primes_i.htm

Misura del cerchio

Ci proponiamo qui di impostare ed eseguire, su un foglio elettronico, il calcolo di π adoperando l'idea di Archimede di inscrivere in una circonferenza dapprima il poligono regolare di *6* lati (esagono regolare), poi (dividendo a metà gli angoli al centro) quello di *12* lati, poi di *24, 48 e 96* lati, calcolando per quest'ultimo un perimetro uguale:

"... al triplo del diametro più una certa porzione di esso che è più piccola di un settimo e più grande dei 10/71-mi del diametro stesso"
che è il valore approssimato di π suggerito da Archimede.

Si abbia il cerchio di diametro unitario in figura e si inscriva in esso l'esagono regolare. Si divida per metà l'angolo *AOB* mediante la *OC*, poi (per metà) l'angolo *AOC* mediante la *OE* e si continui così indefinitamente, ottenendo la successione dei poligoni regolari di *12, 24, 48,* …ecc. lati, inscritti nella circonferenza, che associamo ai numeri interi positivi *n* (ad *n = 1* si associa l'esagono, ad *n = 2* il dodecagono, ecc.).

La freccia *CD* dell'arco *AB*, che indicheremo con *f*, vale:

$$CD = OB - (OB^2 - DB^2)^{1/2}$$ cioè:

$$f_1 = r - (r^2 - (l_1 / 2)^2)^{1/2}$$

Dove *r* è il raggio del cerchio ed l_1 il lato dell'esagono $(r = l_1 = 0,5)$.

Si ha, in generale:

$$f_n = r - (r^2 - (l_n / 2)^2)^{1/2}$$

e le lunghezze dei lati dei poligoni in successione si calcolano:

$$l_{n+1} = (f_n^{\ 2} + (l_n / 2)^2)^{1/2}$$

Inserendo le formule in un foglio elettronico, nel seguente modo:

n	N. lati	f_n	l_n	p_n
1	6	=0,5-(0,5^2-(D2/2)^2)^0,5	0,5	=+D2*B2
=+A2+1	=+B2*2	=0,5-(0,5^2-(D3/2)^2)^0,5	=+(C2^2+(D2/2)^2)^0,5	=+D3*B3
=+A3+1	=+B3*2	=0,5-(0,5^2-(D4/2)^2)^0,5	=+(C3^2+(D3/2)^2)^0,5	=+D4*B4
=+A4+1	=+B4*2	=0,5-(0,5^2-(D5/2)^2)^0,5	=+(C4^2+(D4/2)^2)^0,5	=+D5*B5
=+A5+1	=+B5*2	=0,5-(0,5^2-(D6/2)^2)^0,5	=+(C5^2+(D5/2)^2)^0,5	=+D6*B6
=+A6+1	=+B6*2	=0,5-(0,5^2-(D7/2)^2)^0,5	=+(C6^2+(D6/2)^2)^0,5	=+D7*B7
:	:	:	:	:

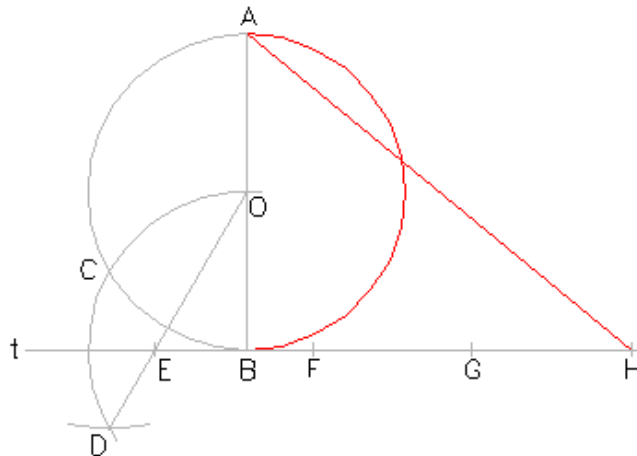
si ottiene la tabella:

n	N. lati	f_n	l_n	p_n
1	6	0,06698729810778	0,50000000000000	3,00000000000000
2	12	0,01703708685547	0,25881904510252	3,10582854123025
3	24	0,00427756931309	0,13052619222005	3,13262861328124
4	48	0,00107053838070	0,06540312923014	3,13935020304687
5	96	0,00026770626182	0,03271908282178	3,14103195089051
6	192	0,00006693104522	0,01636173162649	3,14145247228546
7	384	0,00001673304130	0,00818113960394	3,14155760791186
8	768	0,00000418327782	0,00409060402623	3,14158389214832
9	1536	0,00000104582055	0,00204530629116	3,14159046322805
10	3072	0,00000026145521	0,00102265368034	3,14159210599927
11	6144	0,00000006536381	0,00051132690701	3,14159251669216
12	12288	0,00000001634095	0,00025566346186	3,14159261936538
13	24576	0,00000000408524	0,00012783173198	3,14159264503369
14	49152	0,00000000102131	0,00006391586612	3,14159265145077
15	98304	0,00000000025533	0,00003195793308	3,14159265305504
16	196608	0,00000000006383	0,00001597896654	3,14159265345610
17	393216	0,00000000001596	0,00000798948327	3,14159265355637
18	786432	0,00000000000399	0,00000399474164	3,14159265358144
19	1572864	0,00000000000100	0,00000199737082	3,14159265358770
20	3145728	0,00000000000025	0,00000099868541	3,14159265358927
21	6291456	0,00000000000006	0,00000049934270	3,14159265358966
22	12582912	0,00000000000002	0,00000024967135	3,14159265358976
23	25165824	0,00000000000000	0,00000012483568	3,14159265358979
:	:	:	:	:

L'ultima colonna della tabella contiene la successione dei valori di p_n , perimetro dell'ennesimo poligono regolare inscritto nella circonferenza di diametro unitario.
E' evidente che, per numero dei lati del poligono tendente ad infinito :

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \pi$$

Quadratura del cerchio

Il problema della rettificazione della circonferenza e quello equivalente della quadratura del cerchio, non possono essere risolti alla maniera degli antichi greci, cioè con l'uso esclusivo di riga e compasso.
Tuttavia, esistono soluzioni approssimate di questo problema. Una di queste fu scoperta nel 1685 da *Adam Kochansky*, un Gesuita che lavorava come bibliotecario del re Giovanni di Polonia.

In figura è illustrata la "quadratura approssimata del cerchio di Kochansky". In effetti si tratta (linee in rosso) del problema della rettificazione di una semicirconferenza. La costruzione geometrica di Kochansky è stata realizzata impiegando *AutoCAD*, nel modo seguente:
Si sono tracciati:

- un cerchio di centro *O* e diametro *AB* ed una retta *t* tangente al cerchio nel punto *B*;
- con centro in *B*, un arco di raggio *BO* che interseca il cerchio nel punto *C*;
- con centro in *C* e con la stessa apertura di compasso, un secondo arco, che interseca il primo nel punto *D*;
- la retta *DO*, che interseca la retta *t* nel punto *E*.

Poi, tenendo sempre fissa l'apertura del compasso sul valore iniziale *BO*, si sono riportati successivamente, partendo da *E*, i punti *F*, *G*, ed *H (EF=FG=GH=BO).*
Infine si sono uniti i punti *A* ed *H*.
Avendo eseguito la costruzione con un'apertura del compasso *BO = 1*, secondo i calcoli di Kochansky, il segmento *AH* così ottenuto dovrebbe valere: (1)

AH = 3,141533

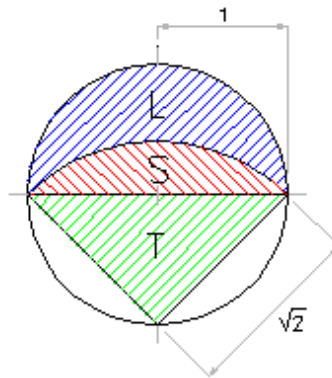
che è appunto l'approssimazione di π trovata da Kochansky, con un errore di circa *1* su *16000*.

AutoCAD ci dà la possibilità di verificare subito tale grado di precisione. Usando il comando "List" sull'oggetto segmento *AH*, si ottiene infatti in "Text Window" il seguente output:

```
LINE      Layer: 0  Space: Model space
          Color: 1 (red) Linetype: BYLAYER
          Handle = 56
    from point, X= 2.422650 Y= 0.000000 Z= 0.000000
      to point, X= 0.000000 Y= 2.000000 Z= 0.000000
Length = 3.14153334, Angle in XY Plane = 140
         Delta X =-2.422650, Delta Y = 2.000000, Delta Z = 0.000000
```

La lunula di Ippocrate

Abbiamo visto come il cerchio non possa essere quadrato che in maniera approssimata. Tuttavia, con semplici procedimenti geometrici, è possibile quadrare esattamente alcune parti del cerchio, come ad esempio la "lunula di Ippocrate".

Consideriamo in figura la "lunula" (parte tratteggiata in blu) delimitata dai due archi di circonferenza aventi raggio *1* e $2^{1/2}$ rispettivamente. Cerchiamo di quadrare questa parte di cerchio, cioè determiniamone l'area attraverso la costruzione (con riga e compasso) di una figura ad essa equivalente.

Distinguiamo, oltre alla lunula sopra detta che indichiamo con la lettera *L*, le seguenti altre due figure: il segmento circolare *S* tratteggiato in rosso ed il triangolo *T* tratteggiato in verde.

L'area del quarto di cerchio composto dalle figure *T* ed *S* vale:

$$T+S = (1/4)\bullet(2^{1/2})^2\bullet\pi = \pi/2$$

L'area del semicerchio composto dalle figure *L* ed *S* vale:

$$L+S = \pi/2$$

quindi si ha: $T = \pi/2 - S$ ed

$L = \pi/2 - S$, cioè: $L = T$.

Il triangolo *T* è la figura che volevamo costruire. (2)

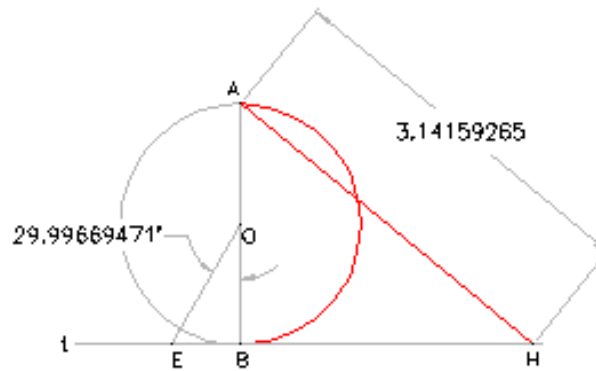
Note

(1) Calcolando, si ha:

$EB = OB \cdot \tan 30° = 0,577350$

$BH = 3 - EB = 2,422650$

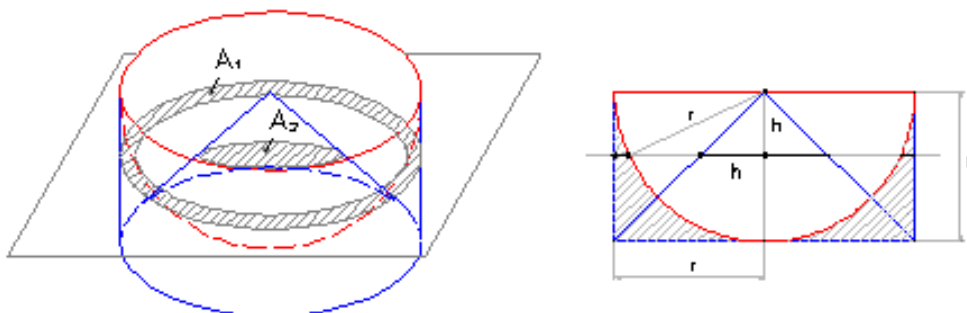
$AH = (AB^2+BH^2)^{1/2} = 3,141533$

L'approssimazione di Kochansky si ottiene quindi con un angolo *EOB* di *30°*, che è costruibile con riga e compasso, come richiesto. Viene da chiedersi quale sia il valore dell'angolo *EOB* che "costruisce" esattamente π. Impiegando ancora AutoCAD ed eseguendo la costruzione al contrario, si è ottenuto il risultato mostrato nella figura seguente:

Il valore di *EOB* che dà π è molto vicino a *30°*.

(2) Se si considera poi che il triangolo *T* equivale ad un quadrato di lato = *1*, il termine "quadratura" risulta qui propriamente detto.

Sulla sfera e il cilindro

Il volume della sfera è 2/3 di quello di un cilindro avente per base un cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro di essa.

Di questo importante risultato di Archimede daremo qui un'altra dimostrazione, seguendo un ragionamento dovuto a Luca Valerio, matematico del 500 molto stimato da Galilei.

Sia dato un cilindro avente base di raggio *r* ed altezza *r*, e si inscrivano in esso una mezza sfera ed un cono, come in figura. Consideriamo il cono ed il solido che si ottiene sottraendo la sfera dal cilindro. Tagliando queste due figure con un piano parallelo alla base, si ottengono due sezioni concentriche: una corona circolare A_1 ed un cerchio A_2. Il cerchio interno della corona circolare ha per raggio il cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa *r* ed altro cateto *h* , perciò la sua area è:

$$A_i = p \cdot (r^2 - h^2)$$

L'area del cerchio esterno della corona vale:

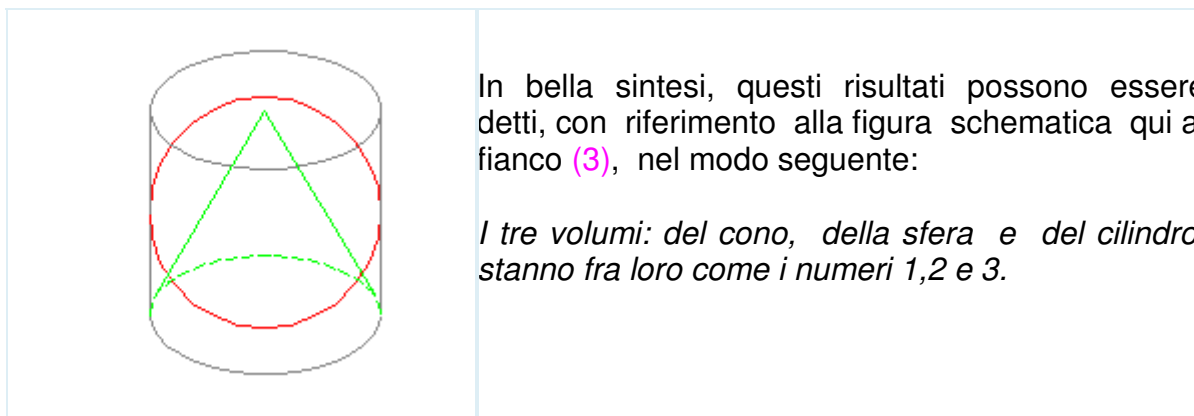
$$A_e = p \cdot r^2$$

quindi l'area della corona vale:

$$A_1 = A_e - A_i = p \cdot r^2 - p \cdot (r^2 - h^2) = p \cdot h^2$$

ma questo valore coincide con quello dell'area della sezione sul cono:

$$A_2 = p \cdot h^2$$

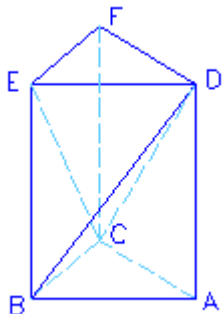
Questo risultato di uguaglianza vale per tutti i possibili piani sezionanti paralleli alla base delle figure. Luca Valerio, considerando le figure in confronto come composte dagli infiniti "fogli" di spessore infinitesimo generati dai piani sezionanti, giunge a concludere che i due volumi, essendo composti da fogli di area uguale sono uguali (1). Ma il volume del cono è un terzo di quello del cilindro (2). Allora il volume della mezza sfera è uguale a due terzi di quello del cilindro. Raddoppiando si ottiene l'enunciato del teorema che si voleva dimostrare.

In bella sintesi, questi risultati possono essere detti, con riferimento alla figura schematica qui a fianco (3), nel modo seguente:

I tre volumi: del cono, della sfera e del cilindro, stanno fra loro come i numeri 1,2 e 3.

Note

(1) Questo è il metodo degli *indivisibili* introdotto da Bonaventura Cavalieri nel 1635. Si sa ora, da un ritrovamento su pergamene avvenuto nel 1906 (v. Metodo), che questo metodo, che anticipa il calcolo infinitesimale, risaliva ad Archimede. Cavalieri l'ha semplicemente "riscoperto" dopo ben 1850 anni !

(2) Euclide - Gli elementi - Libro XII - Proposizione 7:

Ogni prisma che abbia base triangolare si divide in tre piramidi uguali fra loro aventi basi triangolari.

Con riferimento alla figura, è evidente che:
ABDC=BEDC; BCED=CFED; CDFE=CADB c.v.d.

Per estendere a cilindro-cono basta considerare il cerchio di base come composto da triangoli. Una composizione può essere ottenuta dalla figura che compare nell'articolo "Misura del cerchio", prendendo i 6 triangoli equilateri dell'esagono ed aggiungendo i triangoli perimetrali che formano successivamente i poligoni di 12, 24, 48, ecc. lati, all'infinito.

(3) Si dice che Archimede volesse incisa sulla sua pietra tombale una figura simile, a ricordo della sua grande scoperta. E si dice che questa volontà fu fatta eseguire dal console Marcello. Cicerone racconta che al tempo in cui era questore in Sicilia, la curiosità lo spinse a cercare la tomba di Archimede, e trovandosi un giorno fuori della porta di Siracusa, vide tra altre tombe una colonna con su incisa la figura di una sfera ed un cilindro. Fatto sgombrare il sito dagli sterpi riconobbe, dalle iscrizioni corrose dal tempo, che quella era proprio la tomba di Archimede che cercava.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c5/Bowl_02.gif

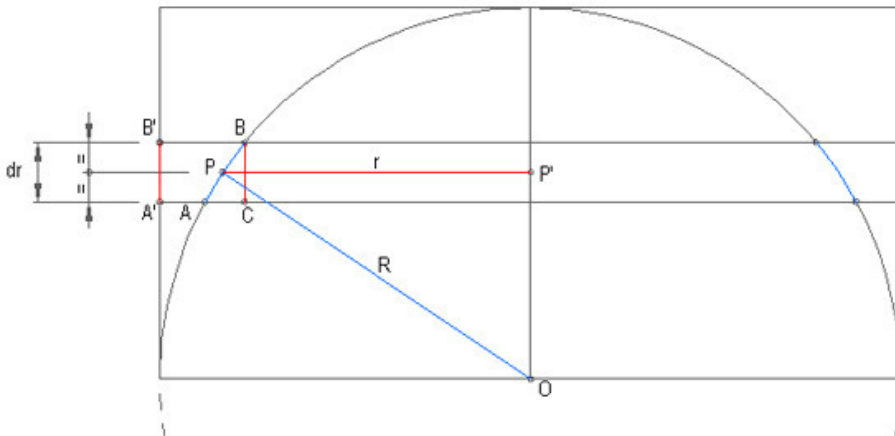
La superficie della sfera

Dimostreremo la proposizione che segue ricorrendo ancora una volta al metodo degli *indivisibili* di Cavalieri.

La superficie della sfera è uguale alla superficie laterale di un cilindro avente per base il cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro di essa.

Questa affermazione dice anche che la superficie della sfera è 4 volte il suo cerchio massimo. Infatti:

$$S = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

Consideriamo due generici piani orizzontali distanti dr che tagliano le superfici della sfera e del cilindro, come in figura.

Dimostriamo che la superficie laterale del cilindro elementare di altezza *A'B'* = *dr* è uguale alla superficie generata dalla rivoluzione del segmento *AB* intorno all'asse *OP'*, cioè:

$$dr \cdot 2\pi R = AB \cdot 2\pi r$$

che equivale a dire:

$$dr \cdot R = AB \cdot r$$

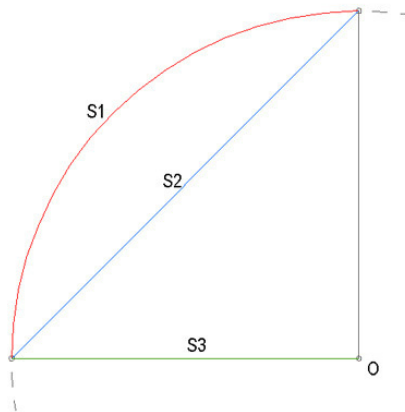
oppure:

$$dr / r = AB / R$$

Ma questa proporzione è evidente nella figura, data la similitudine dei triangoli *OPP'* ed *ABC*, formati da rette perpendicolari fra loro.
Se si prendono le distanze *dr* infinitamente piccole, in modo da rettificare gli archi *APB*, allora, sommando tutte le superfici elementari del cilindro e della sfera, si ottengono due superfici uguali. *C.V.D.*

Da quanto sopra dimostrato, discende una interessante proporzione:

La superficie laterale di un cono avente base di raggio R ed altezza R, è media proporzionale fra la superficie lat. di una semisfera di raggio R e la superficie di un cerchio di raggio R, con rapporto di proporzionalità = $\sqrt{2}$

Mostriamo per semplicità solo le generatrici delle tre figure (che si ottengono per rivoluzione di queste intorno all'asse verticale passante per il punto *O*):

Calcoliamo *S1/S2*:

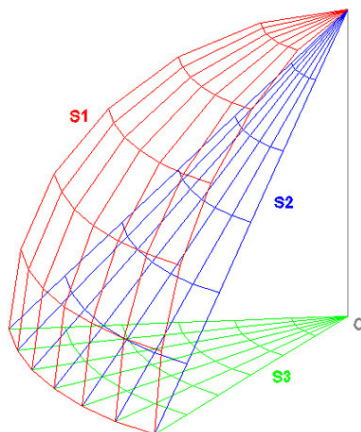
$$S1/S2 = 2\pi R^2 / \pi R^2 \sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

calcoliamo poi *S2/S3*:

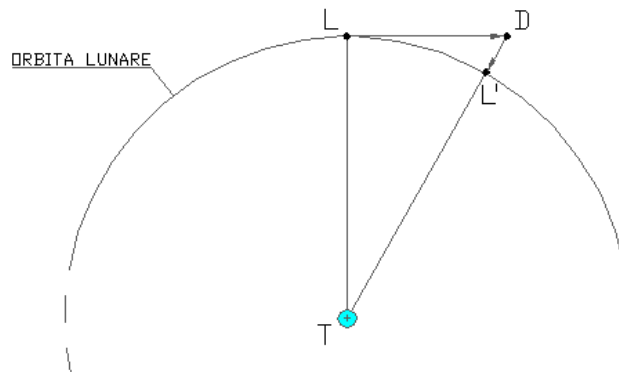
$$S2/S3 = \pi R^2 \sqrt{2} / \pi R^2 = \sqrt{2}$$

per cui vale quanto sopra enunciato, cioè:

$$S1/S2 = S2/S3 = \sqrt{2}$$

Essendoci liberati nei calcoli del fattore 2π la proporzione vale anche per una qualsiasi rotazione parziale delle tre generatrici intorno all'asse verticale passante per *O*, cioè nel caso più generale del semi-spicchio. Si giunge così alla forma classica dell'enunciato, applicato alle "unghie" o semi- spicchi: sferico, conico e piano:

La mela di Newton

La forza che causa la caduta di una mela sulla Terra è della stessa natura di quella che mantiene la Luna in orbita intorno alla Terra.

Questa grande intuizione di Newton, che condusse alla scoperta della Gravitazione Universale, sarà qui dimostrata confrontando il risultato di un calcolo geometrico-cinematico con quello del calcolo gravitazionale.

Siano:

$TL = 3{,}84*10^8 \ m$ distanza Terra-Luna, in prima approssimazione

$p = 2{,}36*10^6 \ sec$ periodo di rivoluzione della Luna

v = sviluppo orbita / p =
$= 2*\pi*3{,}84*10^8 / 2{,}36*10^6 =$
$= 1{,}02234*10^3 \ m/sec$ velocità orbitale

$g = 9{,}8062 \ m/sec^2$ accelerazione di gravità sulla superficie terrestre

$R = 6{,}37*10^6 \ m$ raggio della Terra

$g' = g*R^2 / TL^2 =$
$= 2{,}6985*10^{-3} \ m/sec^2$ accelerazione di gravità sull'orbita lunare

A - Calcolo geometrico-cinematico

In assenza di forze esterne la Luna, con moto rettilineo uniforme, percorrerebbe in un secondo la distanza *LD*:

$LD = v*1 = 1022{,}34 \ m$

La Luna invece resta sull'orbita nel punto *L'*, che si trova sulla congiungente *DT.* Calcoliamo geometricamente la distanza *DL'* :

$DL' = (TL^2 + LD^2)^{1/2} - TL' = 1{,}3609*10^{-3} \ m$

B - Calcolo gravitazionale

In effetti, a causa della forza di gravità esercitata dalla Terra, la Luna cade dal punto *D* al punto *L'* percorrendo in un secondo lo spazio *DL'* che vale:

$DL' = ½ * g' * t^2 = ½ * 2,6985 * 10^{-3} * 1 = 1,3492 * 10^{-3}\ m$

Come si vede, il calcolo meccanico fornisce per *DL'* lo stesso valore (a meno delle approssimazioni fatte) del calcolo geometrico. Quindi, la forza che trattiene la Luna in orbita è la gravità terrestre.

Vediamo ora come si può usare un foglio elettronico per ottenere il valore della distanza Terra-Luna, in corrispondenza del quale si ottengono due risultati uguali per la distanza *DL'*.
Inserite in testa tutte le grandezze della nostra discussione, nella prima riga si immettono i dati e le formule sopra utilizzate, nel modo seguente:

TL	p	v	LD	DL'	g	R	g'	DL'
384000000	2375000	=2*PI.GRECO()*A2/B2	=+C2	=+(A2^2+D2^2)^0,5-A2	9,8062	6367472	=+(G2^2/A2^2)*F2	=+H2/2

Si copia poi in basso il contenuto di tutte le celle della prima riga escluso il valore di *TL*. Quindi si fa variare, nella prima colonna, il valore di *TL* fino ad ottenere nelle colonne *5* e *9* l'uguaglianza dei valori di *DL'*:

TL	p	v	LD	DL'	g	R	g'	DL'
384000000	2375000	1015,8919	1015,8919	0,00134379	9,8062	6367472	0,002696	0,00134816
384050000	2375000	1016,0241	1016,0241	0,00134397	9,8062	6367472	0,002696	0,00134781
384100000	2375000	1016,1564	1016,1564	0,00134414	9,8062	6367472	0,002695	0,00134746
384150000	2375000	1016,2887	1016,2887	0,00134432	9,8062	6367472	0,002694	0,00134711
384200000	2375000	1016,4210	1016,4210	0,00134450	9,8062	6367472	0,002694	0,00134676
384250000	2375000	1016,5532	1016,5532	0,00134468	9,8062	6367472	0,002693	0,00134641
384300000	2375000	1016,6855	1016,6855	0,00134486	9,8062	6367472	0,002692	0,00134606
384350000	2375000	1016,8178	1016,8178	0,00134504	9,8062	6367472	0,002691	0,00134571
384400000	2375000	1016,9501	1016,9501	0,00134516	9,8062	6367472	0,002691	0,00134536
384402000	2375000	1016,9554	1016,9554	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134534
384404000	2375000	1016,9607	1016,9607	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134533
384406000	2375000	1016,9659	1016,9659	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134532
384408000	2375000	1016,9712	1016,9712	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134530
384410000	2375000	1016,9765	1016,9765	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134529
384412000	2375000	1016,9818	1016,9818	0,00134522	9,8062	6367472	0,002691	0,00134527
384414000	2375000	1016,9871	1016,9871	0,00134528	9,8062	6367472	0,002691	0,00134526
384416000	2375000	1016,9924	1016,9924	0,00134528	9,8062	6367472	0,002690	0,00134525
384418000	2375000	1016,9977	1016,9977	0,00134522	9,8062	6367472	0,002690	0,00134523

Il valore trovato di $3,8441 * 10^8\ m$ per la distanza Terra-Luna, concorda, come deve essere, con i risultati delle più recenti misurazioni laser, che forniscono un valore medio di *384.400 Km*.

Problema delle noci di cocco

Ecco qui un esempio di come sia possibile impiegare un foglio elettronico per trovare la soluzione di un complicato problema di matematica presentato agli inizi del 900 e noto come il "problema delle noci di cocco".

Cinque uomini fanno naufragio su un'isola. Non trovano niente da mangiare tranne moltissime noci di cocco; inoltre trovano una scimmia. Decidono allora di dividere le noci di cocco in cinque parti uguali lasciando quanto resta alla scimmia.

Nel mezzo della notte, uno dei naufraghi sente improvvisamente fame e decide di prendersi subito la sua parte di noci di cocco. Nel far questo scopre che, dividendo per cinque il numero di noci, si ha come resto *1*; così egli dà una noce di cocco alla scimmia, prende il suo quinto e riammassa tutte le altre noci. Poco dopo si sveglia un secondo naufrago e fa esattamente la stessa cosa: dà alla scimmia una noce, prende il suo quinto e riammassa il resto. Lo stesso fanno gli altri tre.

La mattina dopo tutti si alzano, dividono quanto resta delle noci in parti uguali e trovano ancora una noce di resto da lasciare alla scimmia.

Quante erano all'inizio le noci di cocco?

I calcoli possono essere organizzati su un foglio elettronico nel modo seguente.

Nel primo campo si elencano i possibili numeri interi che danno le ipotetiche quantità del monte finale delle noci. Nei cinque campi successivi si introducono le formule di calcolo per ottenere, a ritroso, le quantità di noci che ciascun naufrago trova di notte a propria disposizione. Il sesto campo conterrà quindi i valori del monte iniziale delle noci.

Vediamo ora quali sono i valori da introdurre nel primo campo. Analizzando le azioni del mattino, questi numeri devono essere numeri divisibili per *5* aumentati di *1*; inoltre, affinché da essi si possa ricostruire il monte precedente aggiungendo ¼, devono essere numeri divisibili per *4*. Per ottenerli, usiamo il foglio elettronico nel modo seguente:

n	n+1	(n+1)/4
5	6	1,5
10	11	2,75
15	16	4
20	21	5,25
25	26	6,5
30	31	7,75
35	36	9
40	41	10,25
45	46	11,5
50	51	12,75
55	56	14
ecc...		

La sequenza dei numeri da inserire nel primo campo è data dai numeri evidenziati in giallo della seconda colonna. Il primo numero è *16* e gli altri si ottengono sommando successivamente al primo il numero *20* (che è il più piccolo numero divisibile per *5* e per *4*). Per ricostruire le quantità dei monti nei campi successivi basterà aumentare di *1/4* le quantità del campo precedente e sommare *1*. Ciò si ottiene con una formula del tipo *+A1*1,25+1* (valevole ad esempio per la cella *B1*). Introdotte le formule in ciascun campo del primo record e copiando in basso, si ha la tabella che segue:

MONTE FINALE	5° MONTE	4° MONTE	3° MONTE	2° MONTE	MONTE INIZIALE
16	21	27,25	35,0625	44,82813	57,03516
36	46	58,5	74,125	93,65625	118,0703
56	71	89,75	113,1875	142,4844	179,1055
76	96	121	152,25	191,3125	240,1406
96	121	152,25	191,3125	240,1406	301,1758
116	146	183,5	230,375	288,9688	362,2109
136	171	214,75	269,4375	337,7969	423,2461
156	196	246	308,5	386,625	484,2813
176	221	277,25	347,5625	435,4531	545,3164
196	246	308,5	386,625	484,2813	606,3516
216	271	339,75	425,6875	533,1094	667,3867
236	296	371	464,75	581,9375	728,4219
256	321	402,25	503,8125	630,7656	789,457
276	346	433,5	542,875	679,5938	850,4922
296	371	464,75	581,9375	728,4219	911,5273
316	396	496	621	777,25	972,5625
336	421	527,25	660,0625	826,0781	1033,598
356	446	558,5	699,125	874,9063	1094,633
376	471	589,75	738,1875	923,7344	1155,668
396	496	621	777,25	972,5625	1216,703
416	521	652,25	816,3125	1021,391	1277,738
:	:	:	:	:	:

Naturalmente, la soluzione che cerchiamo si troverà nel primo record contenente una sestupla di numeri interi:

.	.	.	.	.	.
5096	6371	7964,75	9956,938	12447,17	15559,96
5116	6396	7996	9996	12496	**15621**
5136	6421	8027,25	10035,06	12544,83	15682,04
.	.	.	.	.	.

Quindi all'inizio le noci di cocco erano *15621*. Proseguendo la ricerca di sestuple intere nel foglio elettronico, ne troviamo una seconda:

.	.	.	.	.	.
10216	12771	15964,75	19956,94	24947,17	31184,96
10236	12796	15996	19996	24996	**31246**
10256	12821	16027,25	20035,06	25044,83	31307,04
.	.	.	.	.	.

e se ne incontrano altre ancora, tutte distanziate nel primo campo di *5120* unità:

MONTE FINALE	5° MONTE	4° MONTE	3° MONTE	2° MONTE	MONTE INIZIALE
5116	6396	7996	9996	12496	**15621**
10236	12796	15996	19996	24996	**31246**
15356	19196	23996	29996	37496	**46871**
20476	25596	31996	39996	49996	**62496**
25596	31996	39996	49996	62496	**78121**
30716	38396	47996	59996	74996	**93746**
35836	44796	55996	69996	87496	**109371**
40956	51196	63996	79996	99996	**124996**
46076	57596	71996	89996	112496	**140621**
51196	63996	79996	99996	124996	**156246**
56316	70396	87996	109996	137496	**171871**
:	:	:	:	:	:

Si potrebbe perciò affermare, per il *principio di induzione*, che esistono infinite soluzioni di questo problema

Osservazioni

1. La tabella finale è interessante per alcune curiose regolarità in essa presenti, ad esempio: la sequenza dei valori del terzo monte si ottiene dal primo valore sommando successivamente il numero *10000*, ed ancora: ogni record si ottiene dal precedente sommando i valori del primo record *+ 4*.

2. Il premio Nobel per la fisica Paul Dirac, diede di questo problema una soluzione matematicamente corretta, il cui record, in una tabella costruita come sopra, sarebbe il seguente:

MONTE FINALE	5° MONTE	4° MONTE	3° MONTE	2° MONTE	MONTE INIZIALE
-4	-4	-4	-4	-4	-4

Ogni naufrago trova - *4* noci, ne sottrae una ottenendone - *5*, ne prende *1/5* lasciandone così - *4* al naufrago successivo, o al monte finale. Questa soluzione è chiaramente irrealizzabile; se però alla tabella applichiamo la regola scoperta nella prima osservazione, secondo cui ogni record si otterrebbe dal precedente sommando i valori del primo record *+ 4*, otteniamo un'altra soluzione, questa volta fin troppo realistica, che è quella in cui i naufraghi sono destinati a morire di fame, non avendo trovato sull'isola alcuna noce. Si può ancora osservare che la sestupla di Dirac si può ottenere applicando la regola sopra detta al primo record della tabella delle soluzioni, ma al contrario, cioè sottraendo da essi stessi i valori del primo record *+ 4*; ciò a conferma della correttezza matematica della soluzione di Dirac. Si dice che questa soluzione negativa abbia avuto una certa influenza sul pensiero di Dirac, che poi avrebbe introdotto il concetto di antimateria.

3. Proseguendo con le osservazioni sul foglio elettronico generale, si può ancora notare che le sequenze dei risultati inter crescono ordinatamente in

corrispondenza dei record n. *1, 4, 16, 64, 256* (le potenze del numero *4*):

REC.	MONTE FINALE	1 5° MONTE	2 4° MONTE	3 3° MONTE	4 2° MONTE	5 1° MONTE
1	16	**21**				
4	76	96	**121**			
16	316	396	496	**621**		
64	1276	1596	1996	2496	**3121**	
256	5116	6396	7996	9996	12496	**15621**

Si intravede la possibilità di ottenere da questa tabella una formula per calcolare, per ogni record, il numero delle noci in corrispondenza dei vari monti, cioè la soluzione matematica del nostro problema.

Indicando con n il numero d'ordine del monte (numero verde) ed adoperando in modo appropriato i numeri *4* e *5*, caratteristici del problema, si trova che:

I valori del campo "monte finale", che indicheremo con $M_f(r)$, dove r indica la posizione del record nella precedente tabella riassuntiva, si possono calcolare nel modo seguente:

$$M_f(r) = 5 \cdot 4^r - 4$$

ad esempio, per $r=3$:

$$M_f(3) = 5 \cdot 4^3 - 4 = 316$$

I valori dell'ennesimo monte al record r, che indicheremo con $M(n,r)$, si ottengono reiterando n volte l'aggiunta di $1/4 + 1$, cioè nel seguente modo tipico, valido per $n=3, r=3$:

$$\begin{aligned} M(3,3) &= ((M_f(3) \cdot 5/4 + 1) \cdot 5/4 + 1) \cdot 5/4 + 1 = \\ &= M_f(3) \cdot (5/4)^3 + (5/4)^2 + 5/4 + 1 = \\ &= 316 \cdot (5/4)^3 + (5/4)^2 + 5/4 + 1 = 621 \end{aligned}$$

Generalizzando, si ottiene:

$$M(n,r) = M_f(r) \cdot (5/4)^n + (5/4)^{n-1} + \cdots + (5/4)^{n-n}$$ cioè:

$$M(n,r) = (5 \cdot 4^r - 4) \cdot (5/4)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (5/4)^k$$

che è infine la formula che si cercava.

La formula di Binet per i numeri di Fibonacci

La successione di Fibonacci è una successione di numeri interi naturali definita come segue:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \qquad \forall n \geq 2$$
$$F_0 = 0 \qquad (1)$$
$$F_1 = 1$$

Lo sviluppo di tale successione è:

$$(F_n) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\ldots\} \qquad (2)$$

La proprietà principale della successione è quella per cui:

$$\lim_{n \to \infty} F_n / F_{n-1} = \Phi \quad \text{(sezione aurea)} \qquad (3)$$

dove:

$$\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1{,}6180339... \qquad (4)$$

Naturalmente il rapporto fra F_n ed il suo successivo tenderà al reciproco della sezione aurea:

$$\lim_{n \to \infty} F_{n-1} / F_n = \phi = (1 - \sqrt{5}) / 2 = -0{,}6180339... \qquad (5)$$

Ogni elemento della successione di Fibonacci si ottiene dalla formula di Binet:

$$F_n = (\Phi^n - \phi^n) / \sqrt{5} \qquad \forall n \in \mathrm{N}_0 \qquad (6)$$

Per mostrare la validità della formula di Binet, consideriamo la differenza:

$$\Delta_n = \Phi_n - \phi_n = ((1 + \sqrt{5}) / 2)^n - ((1 - \sqrt{5}) / 2)^n \qquad (7)$$

Calcolando questa differenza in corrispondenza dei primi numeri naturali si ottiene:

$$\Delta_0 = \Phi^0 - \phi^0 = 0$$

$$\Delta_1 = \Phi^1 - \phi^1 = \sqrt{5} \qquad (8)$$

$$\Delta_2 = \Phi^2 - \phi^2 = \sqrt{5}$$

Si potrebbe a questo punto affermare che i due risultati precedenti, uguali fra loro e di valore $\sqrt{5}$, possono essere ottenuti *solo* servendosi del numero aureo e del suo reciproco. Infatti, dal sistema seguente:

$x - y = \sqrt{5}$

$x^2 - y^2 = \sqrt{5}$

si ottiene la soluzione *unica*:

$x = (1+\sqrt{5})/2 = \Phi = 1{,}6180339\ldots$

$y = (1-\sqrt{5})/2 = \phi = -0{,}6180339\ldots$

Il numero $\sqrt{5}$ sembra quindi essere un ottimo candidato per la costruzione di una successione:

$$(\Delta_n) = (F_n)\sqrt{5} = \{0, 1\sqrt{5}, 1\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, 13\sqrt{5}, \ldots\ldots.\}$$

Proseguendo infatti con i calcoli sopra interrotti, si ha:

$$\Delta_3 = \Phi^3 - \phi^3 = 2\sqrt{5}$$

$$\Delta_4 = \Phi^4 - \phi^4 = 3\sqrt{5} \qquad (8)$$

$$\Delta_5 = \Phi^5 - \phi^5 = 5\sqrt{5}$$

La successione dei risultati prosegue per induzione matematica con valori che sono tutti multipli interi di $\sqrt{5}$ e che nel loro insieme ordinato riproducono esattamente la successione di Fibonacci. Si ha cioè:

$$\Delta_n = \Phi^n - \phi^n = F_n\sqrt{5} \qquad \forall n \in \mathrm{N}_0 \qquad (9)$$

e la validità della formula di Binet (6) risulta così verificata.

La formula di Binet appare a prima vista sorprendente per come da essa, costituita da elementi irrazionali, si ottengano variando *n* solo numeri naturali. In effetti si può vedere, eseguendo i calcoli (8) per trovare i Δ_n, come tutte le radici si elidano lasciando numeri naturali come risultato finale.

Eseguiamo ora una verifica di quanto sopra esposto utilizzando un foglio elettronico:

n	F_n	F_n/F_{n-1}	F_{n-1}/F_n	Φ	φ	$\Delta_n=\Phi^n-\varphi^n$	$\frac{\Phi^n-\varphi^n}{5\text{^}0,5}$
0	0			1,618034	-0,618034	0,0000	0
1	1		0,0000000000000	1,618034	-0,618034	2,2361	1
2	1	1,0000000000000	1,0000000000000	1,618034	-0,618034	2,2361	1
3	2	2,0000000000000	0,5000000000000	1,618034	-0,618034	4,4721	2
4	3	1,5000000000000	0,6666666666667	1,618034	-0,618034	6,7082	3
5	5	1,6666666666667	0,6000000000000	1,618034	-0,618034	11,1803	5
6	8	1,6000000000000	0,6250000000000	1,618034	-0,618034	17,8885	8
7	13	1,6250000000000	0,6153846153846	1,618034	-0,618034	29,0689	13
8	21	1,6153846153846	0,6190476190476	1,618034	-0,618034	46,9574	21
9	34	1,6190476190476	0,6176470588235	1,618034	-0,618034	76,0263	34
10	55	1,6176470588235	0,6181818181818	1,618034	-0,618034	122,9837	55
11	89	1,6181818181818	0,6179775280899	1,618034	-0,618034	199,0100	89
12	144	1,6179775280899	0,6180555555556	1,618034	-0,618034	321,9938	144
13	233	1,6180555555556	0,6180257510730	1,618034	-0,618034	521,0038	233
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

La prima colonna del foglio contiene la successione dei numeri naturali.

La seconda mostra la corrispondente successione di Fibonacci.

Nella terza colonna si vede come i termini della successione (3) tendono alla sezione aurea Φ, per n tendente ad infinito.

Idem come sopra nella quarta colonna per i termini della successione (4), tendenti al numero ϕ.

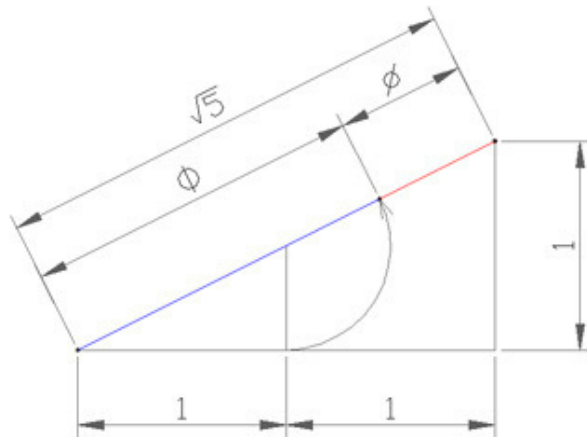
Le colonne quinta e sesta servono per calcolare la settima.

La settima colonna contiene la successione dei valori ottenuti sopra con le (8).

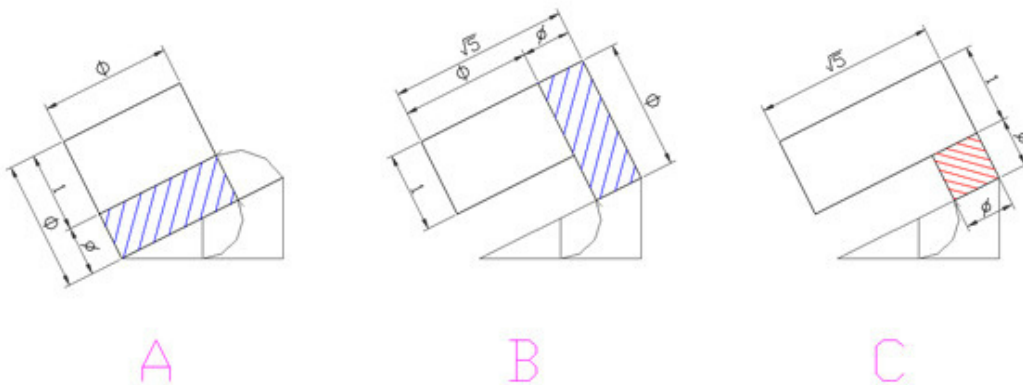
In ottava colonna sono elencati i valori ottenuti dalla formula di Binet (6) variando n, che corrispondono esattamente ai valori della seconda colonna, cioè alla successione di Fibonacci.

Modelli

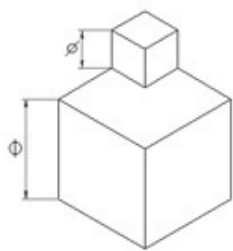
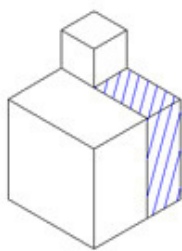
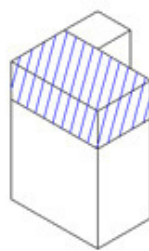
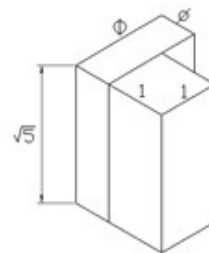
Come al solito, anche questa volta ho cercato modelli geometrici, trovando per le formule (8) che calcolano le differenze Δ_n, le seguenti curiosità.

1 - Per Δ_1 si trova, nello spazio R :

Sull'ipotenusa del triangolo rettangolo in figura, che vale $\sqrt{5}$, si possono costruire i segmenti di lunghezza Φ e ϕ, come mostrato. Si vede come:

$$\Delta_1 = \Phi^1 - \phi^1 = \sqrt{5}\ u \text{ (unità lineari)}$$

2 - Per Δ_2 si trova, nello spazio R^2 :

Il quadrato di lato Φ in fig. A può essere trasformato in B nella figura ad L di pari superficie. In fig. C si vede come:

$$\Delta_2 = \Phi^2 - \phi^2 = \sqrt{5}\ u^2$$

3 - Per Δ_3 si trova, nello spazio R^3 :

Per trasformazioni successive si ottiene dal solido in fig. A il solido in fig. C di pari volume. In fig. D si vede come tale solido possa essere scomposto nella somma di due parallelepipedi di volume pari a $\sqrt{5}\,u^3$, essendo: $\Phi - \phi = 1$ e $\Phi * \phi = 1$. Quindi si ha:

$$\Delta_3 = \Phi^3 - \phi^3 = 2\sqrt{5}\,u^3$$

L’algoritmo di Euclide con AutoCad

L’ *algoritmo di Euclide*, nella sua forma semplice, è un metodo per calcolare il *massimo comun divisore (MCD)* di due numeri interi positivi. Euclide descrisse questo metodo, basato su “sottrazioni successive”, nel suo libro degli Elementi. Partendo da una coppia di interi positivi, egli forma successivamente nuove coppie, costituite ciascuna dal numero più piccolo della coppia precedente e dalla differenza fra i numeri della stessa coppia. Il processo termina con due numeri uguali, che è il *MCD* della coppia originale.

L’algoritmo si basa sulla seguente proprietà:

Se due numeri a e b sono divisibili per un terzo numero k, allora anche la loro differenza è divisibile per k.

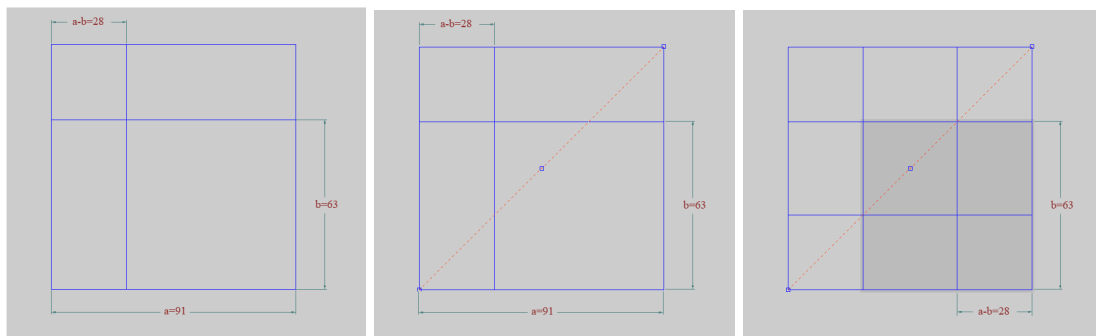
Dimostrazione

Supponiamo $a > b$, allora:

$a = k \cdot m$
$b = k \cdot n$
$a\text{-}b = k \cdot (m\text{-}n)$

Si può quindi dire, nel caso particolare in cui $k = MCD(a,b)$:

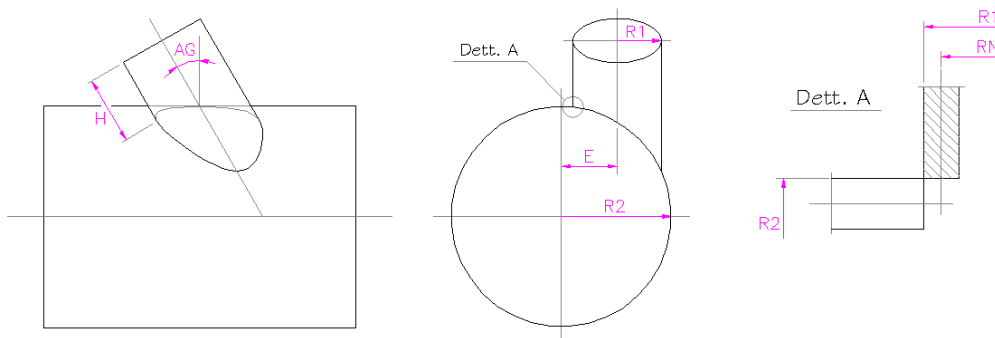
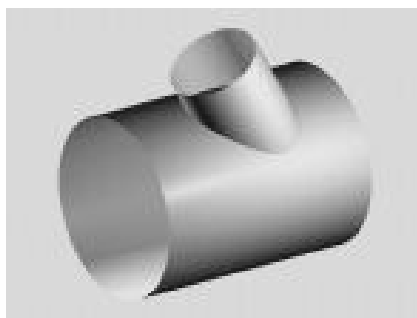
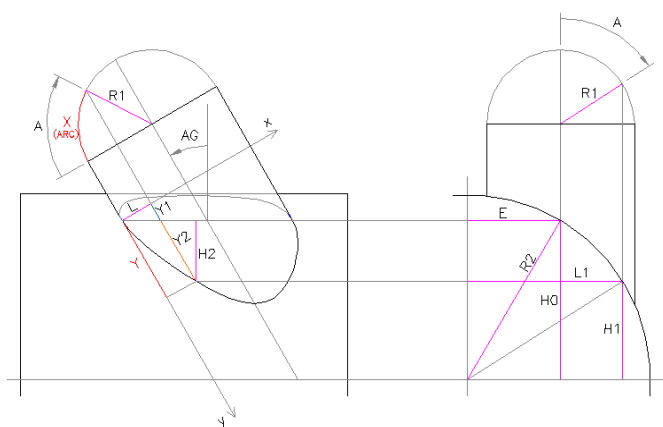
$MCD(a,b) = MCD((a\text{-}b),b)$

Nell’animazione di seguito linkata, è mostrata un’applicazione grafica dell’algoritmo euclideo per ottenere, usando AutoCAD, il *MCD* di due segmenti di retta, aventi lunghezze intere *a* e *b*. In essa, le “sottrazioni successive” si ottengono capovolgendo dei quadrati intorno alla diagonale, come segue:

Si tratta tuttavia di una implementazione di scarso interesse pratico, essendovene di più efficienti, sempre derivate da Euclide, basate sulle “divisioni successive”.

Link: http://youtu.be/Bp1DT39t3cs

Un utilizzo pratico di AutoCAD

Vi presento ora una implementazione grafica di AutoCAD che, a differenza della precedente, ha un interesse pratico, essendo impiegabile nelle officine meccaniche per ottenere gli sviluppi in piano delle superfici 3D che maggiormente ricorrono nella tipologia costruttiva di componenti di Caldareria e Piping ricavati da lamiera.

Il caso in esame è quello dello sviluppo in piano di una *intersezione obliqua fra cilindri*, mostrata in figura:

Le formule necessarie per la creazione del programma, in linguaggio AutoLISP, sono ricavate dalla figura seguente:

$$X = R1 \times A$$

$$L = R1 - R1 \times \cos A$$

$$Y1 = L \times \tan AG$$

$$H0 = \sqrt{R2^2 - E^2}$$

$$L1 = E + R1 \times \sin A$$

$$H1 = \sqrt{R2^2 - L1^2}$$

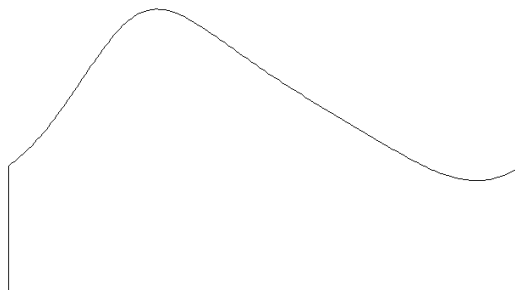
$$H2 = H0 - H1$$

$$Y2 = H2 / \cos AG$$

$$Y = Y1 + Y2$$

Il listato del programma, da scrivere con l'editor dei testi di AutoCAD, è questo:

```
(DEFUN C:BOCC2 ()
   (GRAPHSCR)
      (SETQ AG (GETREAL "\nIMMETTERE ANGOLO AG: ")
            R1 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R1: ")
            RN (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO RN: ")
            R2 (GETREAL "\nIMMETTERE RAGGIO R2: ")
            E (GETREAL "\nIMMETTERE ECCENTRICITA' E: ")
            H (GETREAL "\nIMMETTERE ALTEZZA H: ")
            P1 (GETPOINT "\nPUNTO INIZIALE: ")
      )
         (SETQ P1 (LIST 0 0))
         (SETQ A (/ PI 90))
            (REPEAT 180
               (SETQ L (- R1 (* R1 (COS A)))
                     Y1 (* L (/ (SIN (* (/ PI 180) AG)) (COS (* (/ PI 180)
AG))))
                     H0 (SQRT (- (* R2 R2) (EXPT E 2)))
                     L1 (+ E (* R1 (SIN A)))
                     H1 (SQRT (- (* R2 R2) (* L1 L1)))
                     H2 (- H0 H1)
                     Y2 (/ H2 (COS (* (/ PI 180) AG)))
                     Y (+ Y1 Y2)
                     K (/ RN R1)
                     X (* (* K R1) A) P2 (LIST X Y)
               )
                  (COMMAND "LINE" P1 P2 "")
                  (SETQ P1 P2)
                  (SETQ A (+ A (/ PI 90)))
            )
                  (SETQ P3 (LIST (CAR P2) (- 0 H)))
                  (SETQ P4 (LIST 0 (- 0 H)))
                  (SETQ P5 (LIST 0 (CADR P2)))
                  (COMMAND "LINE" P2 P3 P4 P5 "")
                  (COMMAND "ZOOM" "ALL" "")
                  (PRINC)
)
```

Questo programma, salvato nel file: BOCC2.LSP, può essere utilizzato come comando di AutoCAD, caricandolo dal menu "Tools" con "Load Application" (AutoCad 14).
Si ottiene il seguente output grafico utilizzabile per programmare un impianto automatico di taglio termico lamiere.

Per gli approfondimenti di questo argomento si può visitare il mio sito web:
https://sites.google.com/site/quadernitecnici/home
dove sono presentati ben 25 diversi programmi AutoLISP scaricabili liberamente.

La ragazza sul lago Rotondo

Vi propongo ora un bel problema di logica formale, apparso sulla rivista "Scientific American" tanti anni fa. Si tratta di un problema di non facile soluzione, da affrontare usando la logica e la matematica di tipo liceale.

Una ragazza molto carina è in vacanza sul lago Rotondo, così chiamato perché ha una forma perfettamente circolare con raggio *r*.
Una mattina la ragazza, mentre passeggia lungo la sponda del lago, viene avvicinata da un bruto che cerca di violentarla. La ragazza riesce a divincolarsi e si mette a correre lungo la sponda del lago, inseguita dal bruto. Fuggendo, vede una barchetta sulla riva, per cui vi entra dentro e voga verso il centro del lago per portarsi in salvo. Il bruto corre con una velocità esattamente 4 volte superiore alla velocità con la quale lei voga.
Premesso che:

- il bruto non sa nuotare e non può fare altro che correre in tondo;
- la ragazza è sempre a conoscenza delle proprie coordinate di posizione;

ci si pone la domanda: come fa la ragazza a salvarsi?

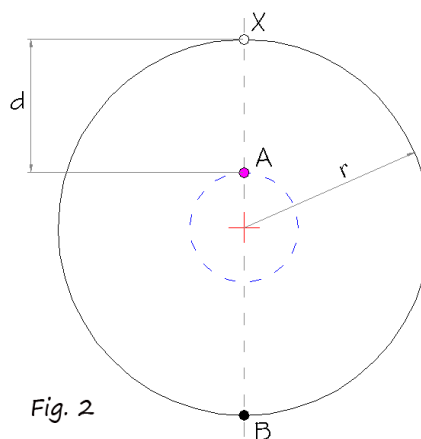
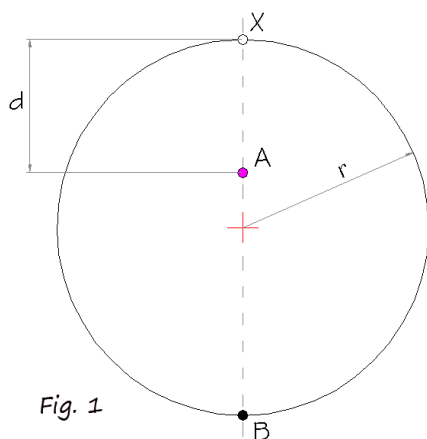
Soluzione
Indichiamo con *A* e *B* le posizioni della ragazza e del bruto, rispettivamente.
Esaminiamo la situazione ipotetica in cui la ragazza e il bruto si incontrano sulla sponda del lago, in un punto *X*, nello stesso istante. Perché ciò avvenga, la ragazza *A* dovrebbe trovarsi, ad un certo punto della sua fuga, in una posizione opposta a *B* (figura 1) e distante dalla riva di un tratto:

$d = (\pi / 4) \cdot r$

La ragazza si salverà se:

$(3/4) \cdot r < d < (\pi / 4) \cdot r \qquad (1)$

Ma come può la ragazza, partendo dal centro del lago, raggiungere la posizione della figura 1?
Esaminiamo la figura 2, in cui è mostrato un percorso circolare concentrico passante per la posizione *A* della figura 1. Se la ragazza, partendo da centro, si porta su un qualsiasi punto di questo percorso, può percorrerlo in modo da trovarsi, ad un certo punto, nella posizione di salvezza della figura 1. Infatti, come si può facilmente vedere, su questo percorso circolare la velocità angolare della ragazza risulta essere leggermente superiore a quella del bruto. Per cui, raggiunta l'opposizione con B, la ragazza potrà tagliare lungo il raggio e salvarsi.

Fig. 1 Fig. 2

La relazione (1) descrive una sottile corona circolare, al cui interno tutti i percorsi circolari concentrici sono validi. Sono da escludere gli estremi dell'intervallo (segni =) che danno:

- il più piccolo: una velocità angolare uguale a quella del bruto, e quindi l'impossibilità di realizzare la posizione di opposizione che porta alla salvezza;
- il più grande: la corsa finale verso un appuntamento fatale.

L'ultimo teorema di Fermat: una sfida ancora aperta

La storia di questo teorema è arcinota, tuttavia la riepiloghiamo qui brevemente.

Si racconta che il matematico francese del XVII secolo, Pierre de Fermat, alle prese con la lettura di una edizione dell'*Arithmetica* di Diofanto, abbia un giorno annotato ai margini della stessa, come era solito fare con le sue teorie, la frase seguente:
« È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di 2 come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina »

Ciò facendo, forse senza rendersene conto, aveva posto una domanda alla quale gli antichi matematici greci non avevano pensato, formulando, in una maniera che stupisce per la sua semplicità, il problema più difficile che sia mai esistito.

Nei secoli successivi molti grandi matematici cercarono la dimostrazione "perduta" di questo teorema. Eulero dimostrò l'impossibilità di soluzioni intere per n = 3. Altri matematici, come Legendre e Lejeune-Dirichlet, dimostrarono autonomamente il caso n = 5. Ma nessuno di essi giunse mai ad una conclusione, cioè ad una dimostrazione matematica rigorosa della congettura di Fermat valida per qualsiasi n.

Finalmente nel 1994, Andrew Wiles, dell'università di Princeton, con l'aiuto di Richard Taylor, diede una dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, pubblicata nel 1995 sulla rivista Annals of Mathematics.

Anni prima due matematici giapponesi, Yutaka e Shimura, avevano congetturato (senza dimostrarla) una profonda interconnessione fra le "Curve Ellittiche" e le "Forme Modulari", due campi della matematica completamente diversi. Tale congettura afferma che ogni curva ellittica è modulare, potendo essere associata con un'unica forma modulare. In seguito, altri ricercatori provarono che, se la congettura di Fermat non fosse vera, esisterebbe una soluzione (a,b,c) per n > 2, con cui sarebbe possibile creare una curva ellittica non modulare, contro la congettura di Yutaka e Shimura. Per risolvere l'ultimo teorema di Fermat, bastava quindi dimostrare la congettura di Yutaka e Shimura. Per fare ciò Wiles ha impiegato ben sette anni, la maggior parte dei quali in completo isolamento, compiendo uno sforzo titanico per far convergere tutte le più recenti tecniche della teoria dei numeri verso la sua dimostrazione del teorema di Fermat.

Quindi, oltre al lavoro di altri ricercatori in campi diversi della matematica del XX secolo, Wiles utilizza tecniche e strumenti che erano sconosciuti ai tempi di Fermat. Il risultato finale è un lavoro imponente (oltre 300 pagine) scritto in termini molto difficili, anche per la maggior parte dei matematici di oggi.

Al contrario, ammesso che esista e che sia valida, la dimostrazione di Fermat

dovrebbe risultare molto più sintetica ed elementare, degna della bellezza del suo enunciato (meravigliosa), scritta nei termini usati dai matematici del XVII secolo. Perciò, secondo questa ipotesi, la ricerca della dimostrazione perduta sarebbe da considerarsi una sfida ancora aperta.

Tuttavia, molti matematici sono più propensi a credere che Fermat si sia riferito, nella sua nota ai margini del testo di Diofanto, all'esistenza di una sua dimostrazione, dapprima ritenuta corretta, ma poi abbandonata o messa da parte in seguito a ripensamenti, come è accaduto a molti matematici successivi che si sono cimentati con lo stesso problema. Una prova di ciò sarebbe l'esistenza di un lavoro parziale sull'impossibilità di soluzioni intere per n=4, pubblicato da Fermat in epoca successiva, che dimostrerebbe che la ricerca per lui non era ancora conclusa.

Recentemente, nuove dimostrazioni del teorema di Fermat sono state proposte all'attenzione della comunità scientifica internazionale, segno che la sfida rimane ancora aperta e che molti matematici continuano la ricerca della prova più semplice che Fermat poteva avere in mente.

Problemi sulla scacchiera

1 - La leggenda di Sissa

Si tratta di una leggenda indiana sulla nascita degli scacchi, secondo cui un principe indiano, volendo ricompensare il suo bramino Sissa per l'invenzione del gioco degli scacchi, si vide avanzare una richiesta apparentemente modesta. Avrebbe dovuto pagare un chicco di grano sulla prima casella della scacchiera, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando, fino a ricoprire l'intera scacchiera.
Il principe promise il premio, ma poi si rese conto di non avere abbastanza grano per mantenere l'impegno preso. Sicuramente Sissa non ebbe quello che chiedeva, in quanto la sopradetta somma risulta essere un numero molto alto:

18446744073709551615 (circa 1000 miliardi di tonnellate di grano)

Per calcolare questo numero Leonardo Fibonacci (Liber Abaci-1202) calcola il risultato della prima riga (8 caselle) che è *255*, minore di una unità del numero successivo $256 = 2^8$, il primo della seconda riga. Poi, raddoppiando tre volte il numero delle caselle da conteggiare, fa notare che:

$(2^8)^2 = 2^{16} = 65536$ supera di *1* la somma delle prime *16* caselle

$(2^{16})^2 = 2^{32} = 4294967296$ supera di *1* la somma delle prime *32* caselle

$(2^{32})^2 = 2^{64} = 18446744073709551616$ supera di *1* la somma di tutte le *64* caselle

Quindi, il numero dei chicchi di grano, che indichiamo con S, è:

$S = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$

Lo stesso risultato si ottiene dalla progressione geometrica di ragione q:

$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$
$S_n \cdot q = q + q^2 + q^3 + ... + q^n$
$S_n \cdot q - S_n = q^n - 1$

Nel nostro caso $q=2$, quindi:

$S_n \cdot 2 - S_n = 2^n - 1$
$S_{64} = 2^{64} - 1$

2 - Somma dei primi "n" numeri dispari

Secondo me, il modo più immediato per trovare la formula che calcola la somma dei primi n numeri dispari è quello che utilizza una scacchiera, o una qualsiasi griglia quadrata, nel modo seguente:

Prendendo come unità una casella della scacchiera ed evidenziando la sequenza dei numeri dispari come in figura, si vede subito che:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$

e si può scrivere, per induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} (2n-1) = n^2$$

3 - Quanti quadrati si vedono in una scacchiera?

I quadrati di lato unitario sono $8^2 = 64$.

I quadrati di lato maggiore di *1* si contano ordinatamente spostandosi sulle righe (o colonne) di una colonna (o riga alla volta). Si ottengono:

7^2 *quadrati di lato 2*
6^2 *quadrati di lato 3*
5^2 *quadrati di lato 4*
4^2 *quadrati di lato 5*
3^2 *quadrati di lato 6*
2^2 *quadrati di lato 7*
1 quadrato di lato 8

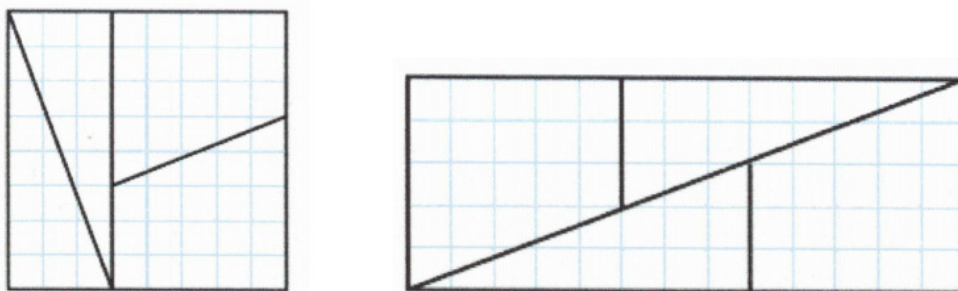
Perciò il numero totale dei quadrati visibili è dato dalla somma dei quadrati dei primi *8* numeri naturali:

$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$

In generale, in una scacchiera *n x n* i quadrati visibili sono dati dal numero piramidale quadrato (ancora lui!):

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

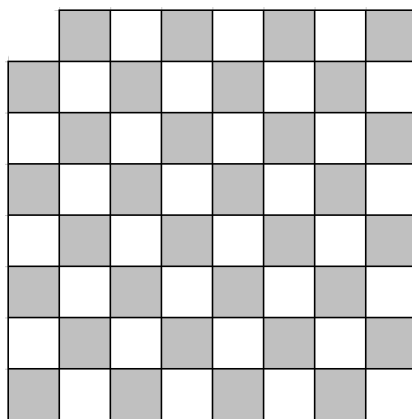
4 - L'enigma della scacchiera spezzata

Dividiamo una scacchiera *8 x 8* in quattro parti, come mostra la prima figura, e ricomponiamola come nella seconda figura.

Le figure sono composte, l'una e l'altra, da due triangoli rettangoli di base *8* e altezza *3* e due trapezi rettangoli di altezza *5* e basi parallele lunghe *5* e *3*. Ma il quadrato a sinistra contiene *64* quadratini, mentre il rettangolo ne contiene *13 x 5 = 65*. C'è un quadratino in più, come mai?

L'enigma si scioglie facilmente. Basta confrontare, nella figura rettangolare, le inclinazioni dell'ipotenusa di un triangolo e del lato obliquo del trapezio adiacente. Infatti, l'ipotenusa ha una pendenza pari a *3/8 = 0,375*, mentre il lato obliquo ha pendenza *2/5 = 0,4*. Essendo diversamente inclinati i due segmenti non possono appartenere, così come *sembra*, alla diagonale del rettangolo che è una linea retta. Sono queste differenze impercettibili fra la figura reale e quella apparente che formano la differenza, cioè il quadratino in più.

C'è un altro modo per sciogliere l'enigma. La differenza esatta di un quadrato si trova calcolando le aree dei triangoli con il teorema di Pick (il *punto-griglia* sull'ipotenusa compare solo nella seconda figura).

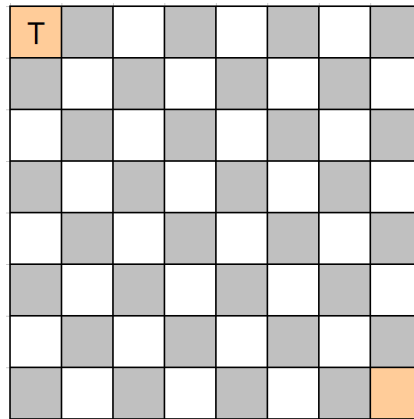
5 - La scacchiera mutilata

Ad una scacchiera sono state tolte le due caselle d'angolo, come in figura. Si prendano *31* tessere rettangolari tali che ogni tessera ricopra esattamente due caselle.
Domanda: è possibile disporre le *31* tessere in modo da ricoprire con esse tutta la scacchiera?

Il problema si risolve col ragionamento seguente:

- La scacchiera è formata da *30* caselle bianche e *32* nere.
- Due caselle adiacenti hanno sempre colori diversi.
- Allora, comunque vengano disposte, le prime *30* tessere ricoprirono *30* caselle bianche e *30* nere.
- Le due caselle rimanenti saranno sempre di colore nero, perciò non possono essere entrambe coperte dalla tessera restante.

Perciò, qualsiasi combinazione di tessere non riuscirà a coprire la scacchiera mutilata.

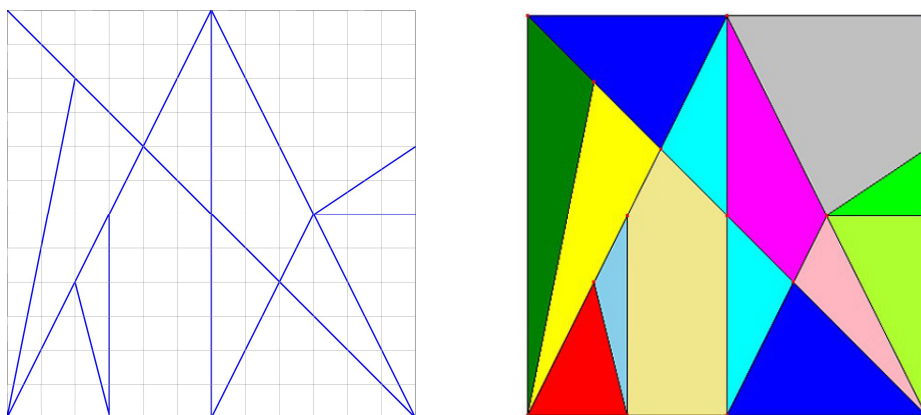
6 - A passo di torre

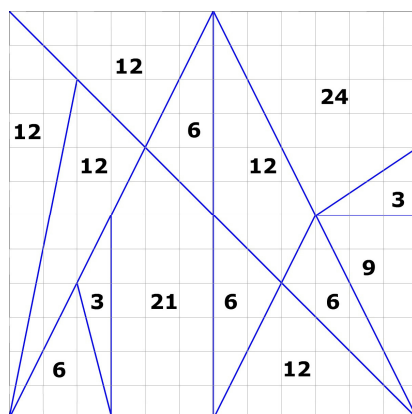
E' possibile raggiungere con una torre, partendo dalla casella in alto a sinistra, la casella in basso a destra, transitando una sola volta su tutte le *64* caselle della scacchiera?

Il problema si risolve col ragionamento seguente:

- Ad ogni avanzamento elementare (di una casella), qualunque sia il percorso, cambia il colore della casella, da bianco *B* a nero *N* o viceversa.
- Numeriamo la sequenza degli spostamenti, su qualsiasi percorso, con i numeri da *1* a *64*.
- Mettendo in corrispondenza la numerazione con la sequenza *B,N,B,N,B,N…..*, si vede che, ad ogni numero pari corrisponde il colore nero *N*. Perciò, lo spostamento finale non potrà mai portare la torre sul bianco.

Perciò, qualunque sia il percorso seguito, la torre non raggiungerà mai il suo obiettivo.

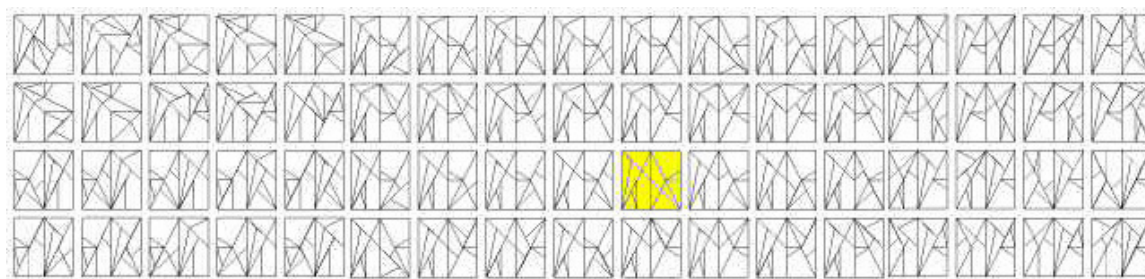
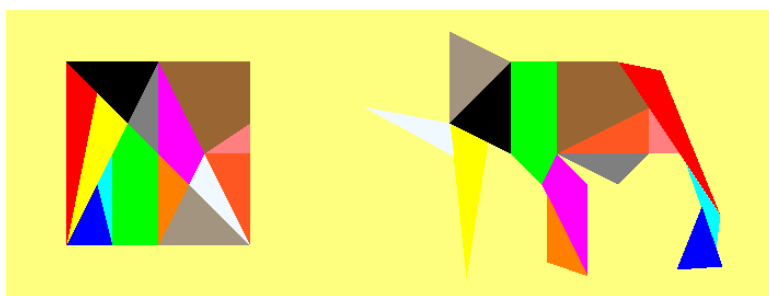
Lo Stomachion

Su una scacchiera *12 x 12* tracciamo delle linee dividendo la scacchiera in *14* pezzi, come nella figura seguente:

Abbiamo così ottenuto le *14* tessere dello Stomachion (vedi copertina), un gioco antichissimo di cui sembra si sia occupato lo stesso Archimede, studiandone le proprietà geometriche e matematiche.

Il calcolo dell'area di ogni singolo pezzo dello Stomachion si esegue elementarmente, senza scomodare il teorema di Pick, ottenendo i seguenti valori.

Risulta quindi che i *14* pezzi sono tutti commensurabili con l'area del quadrato, nei seguenti rapporti:

2 pezzi di area 3 *1/48*
4 pezzi di area 6 *1/24*
1 pezzo di area 9 *1/16*
5 pezzi di area 12 *1/12*
1 pezzo di area 21 *7/48*
1 pezzo di area 24 *1/6*

e che l'area di ciascun pezzo è multipla dell'area del pezzo più piccolo (*1/48*).

Questa proprietà dei pezzi permette di costruire, usando tutti i pezzi o una parte di essi, varie figure geometriche le cui aree stiano fra loro in determinati rapporti.
Un'altra caratteristica delle varie forme poligonali del gioco è la presenza in esse di diverse coppie di lati uguali e di relazioni particolari fra i vari angoli, per cui esistono svariate possibilità di assemblaggio dei pezzi nella forma di un quadrato (1). Lo Stomachion propone quindi un problema di geometria computazionale, risolto solo di recente.
Un gruppo di ricercatori della Stanford University ha calcolato che i numero totale delle configurazioni ottenibili nel quadrato *12 x 12*, cioè tutte le possibili soluzioni del puzzle, è *17152*.
Secondo Bill Cutler della Cornell University, queste sono riducibili a *536* soluzioni distinte, se si considerano equivalenti tutte le configurazioni ottenibili l'una dall'altra per rotazione o per riflessione (2).
Mostriamo qui di seguito alcune delle *536* configurazioni distinte trovate da Cutler:

Se liberiamo il gioco dall'obbligo di assemblare le tessere separate nella forma del quadrato iniziale, allora il numero delle figure ottenibili, impiegando tutte o parte delle tessere, diventa elevatissimo, tanto da rendere significativa la possibilità di realizzare figure dalla fisionomia nota, che è l'obiettivo principale per cui il gioco viene utilizzato.
Nelle figure che seguono mostriamo l'Elefante di Ausonio ed altre figure interessanti che si possono costruire con lo Stomachion:

Note

1 – Osservando le configurazioni di Cutler si possono vedere i vari modi in cui è possibile assemblare più pezzi, aventi lati la cui somma dia il lato del quadrato, da disporre quindi su un lato, oppure pezzi con angoli che sommati diano un angolo retto, da piazzare sui vertici, ed altre possibilità.

2 - Non ci vuole molto a calcolare, partendo dal numero *17152* di soluzioni possibili, il numero *536* di soluzioni distinte. Infatti, combinando i numeri seguenti:

4 rotazioni intorno al centro del quadrato
2 riflessioni rispetto ai lati
2 riflessioni rispetto agli assi
2 riflessioni rispetto alle diagonali

Otteniamo: *4 x 2 x 2 x 2 = 32*

Per cui: *17152 / 32 = 536*

SULLE AREE ED I PERIMETRI DEI POLIGONI REGOLARI

Sempre sul tema guida di questo libro , illustrato nell'introduzione, un'altra interessante "riscoperta" l'ho fatta mentre indagavo su un argomento storico della matematica: quello della scoperta fatta dal matematico indiano *Madhava di Sangamagrama* nel 1400, e poi da *Gregory* e *Leibniz* nel 1600, secondo cui il valore di π si ottiene dalla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Alla consueta ricerca di un modello geometrico che potesse spiegare la serie, ho "calcolato" agevolmente con Autocad (**) i valori delle aree dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza di raggio unitario, ottenuti partendo dal triangolo equilatero, raddoppiando successivamente il numero dei lati. Come è noto, il valore di π corrisponde all'area del poligono con infiniti lati (cerchio). Ho poi calcolato i semi-perimetri delle stesse figure disegnate, poichè anche la sequenza di questi valori conduce a π . I risultati ottenuti sono elencati nella tabella seguente:

N. Lati	Area	Semi-perimetro
3	1,299038	2,598076
6	2,598076	3,000000
12	3,000000	3,105829
24	3,105829	3,132629
48	3,132629	3,139350
96	3,139350	3,141032

La "riscoperta" di cui accennavo all'inizio, sta nel fatto che le due sequenze di valori ***coincidono perfettamente***, a meno della scalatura. C'era da aspettarselo, in quanto le due sequenze sono stare costruite sullo stesso modello geometrico e conducono allo stesso risultato, anche se singolarmente esprimono quantità diverse. Bisognerà tuttavia darne una dimostrazione.

(**) Disegnata una "*regione*" piana, la sua area ed il suo perimetro si ottengono con i comandi "*Inquiry*" e "*Region/Mass*

Lo stesso risultato di sopra si ottiene partendo dal quadrato e dal pentagono:

N. Lati	Area	Semi-perimetro
4	2,000000	2,828427
8	2,828427	3,061467
16	3,061467	3,121445
32	3,121445	3,136548
64	3,136548	3,140331
128	3,140331	3,141277

N. Lati	Area	Semi-perimetro
5	2,377641	2,938926
10	2,938926	3,090170
20	3,090170	3,128689
40	3,128689	3,138364
80	3,138364	3,140785
160	3,140785	3,141391

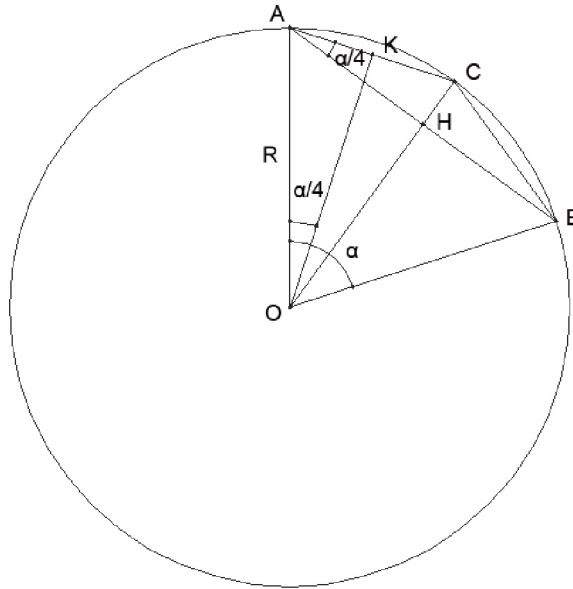
per cui sembra possibile una estensione, comprendendovi poligoni regolari di un qualsiasi numero di lati. Generalizzando poi a circonferenze di raggio *R* qualsiasi, questi risultati consentirebbero di affermare quanto segue:

Il valore numerico del semi-perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio R, è uguale al valore numerico dell'area del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza.

Questa affermazione ha, per ora, il valore di una semplice constatazione, senza alcun valore, in quanto mette a confronto quantità eterogenee, quali lunghezze ed aree. Le forniremo allora un significato geometrico, elevandola al rango di teorema, formulandola invece nel seguente modo:

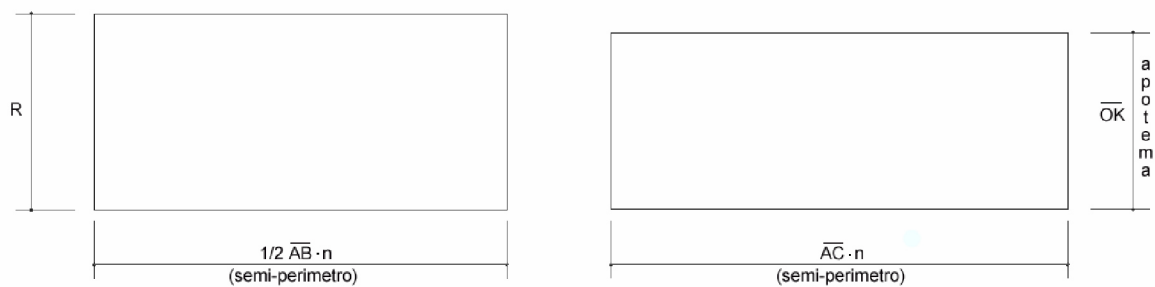
L'area del rettangolo avente per base il semi-perimetro di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio R, e per altezza lo stesso raggio R, è uguale all'area del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza.

<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo, in un cerchio di raggio *R*, uno spicchio generico di ampiezza α , dove α è l'ennesima parte di 2π, e costruiamo in esso un ennesimo dei poligoni di n e $2n$ lati in esame.

Nella figura sono evidenti le seguenti relazioni:

$$\overline{OK} = \overline{OA}\cos\frac{\alpha}{4} = R\cos\frac{\alpha}{4}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\cos\frac{\alpha}{4}}$$

Dobbiamo dimostrare l'equivalenza dei rettangoli:

cioè che:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot n\cdot R=\overline{AC}\cdot n\cdot\overline{OK}$$

eliminando n si ha:

$$\overline{AH}\cdot R=\overline{AC}\cdot\overline{OK}$$

e sostituendo:

$$\overline{AC}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot R=\overline{AC}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot R$$

che è l'identità che dimostra il teorema.

Osservazion i

Esaminando ancora una volta i due rettangoli a confronto della figura precedente, si può notare che, mentre la base del secondo rettangolo si "*allunga*", rispetto alla prima, di un fattore *1/cos(α/4)*, l'altezza dello stesso si "*accorcia*" di un fattore *cos(α/4)*. Così, il loro prodotto resta invariato, e procedendo con il raddoppio del numero dei lati dei poligoni, si generano le coppie di figure equivalenti osservate.

Inoltre, sfruttando il fattore variabile *1/cos(α/4)* visto sopra, sembra agevole, partendo dal valore 3 del semi-perimetro dell'esagono regolare, costruire una sequenza infinita di valori il cui limite è π.

Conclusione

In questo articolo abbiamo "rispolverato" una delle tante curiosità della matematica che, a causa della loro scarsa importanza, tendono a cadere nell'oblio, ma che non cessano di meravigliarci, quando, percorrendo strade diverse, fortuitamente ci imbattiamo in esse.

P.S.

Mi è venuto in mente, in un secondo momento, che si poteva fare a meno della trigonometria, sia nella dimostrazione che nella osservazione, mettendo da parte $\cos(\alpha/4)$ e sfruttando invece nei ragionamenti, forse in maniera più semplice, le relazioni di proporzionalità esistenti fra i lati dei triangoli rettangoli simili OAK e ACH.